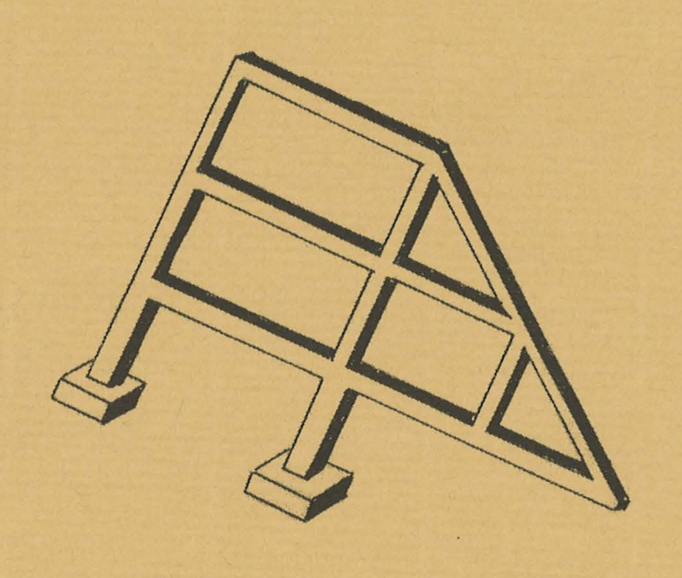
MÉTODOS DE LAS SY Y DE LAS ROTACIONES

DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS

(II)

por

José Molina Dominguez



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-58-02

MÉTODOS DE LAS SY Y DE LAS ROTACIONES

DE CÁLCULO DE ESTRUCTURAS

(II)

por

JOSÉ MOLINA DOMINGUEZ

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

1-58-02

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

NUEVA NUMERACIÓN

1 Área
58 Autor
02 Ordinal de cuaderno (del autor)

Métodos de las SY y de las rotaciones de cálculo de estructuras (II)

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid
Gestión y portada: Laura Bejerano Iglesias
CUADERNO 169.01
ISBN: 84-9728-093-8 (obra completa)
ISBN: 84-9728-110-1 (vol.II)
Depósito Legal: M-28519-2004

Métodos de las SY y de las rotaciones de cálculo de estructuras (II)

Ejercicios.

INDICE:

Ejercicio pág.

7 30

8 32

9 35

10 37

11 39

12 42

13 49

14 51

15 58

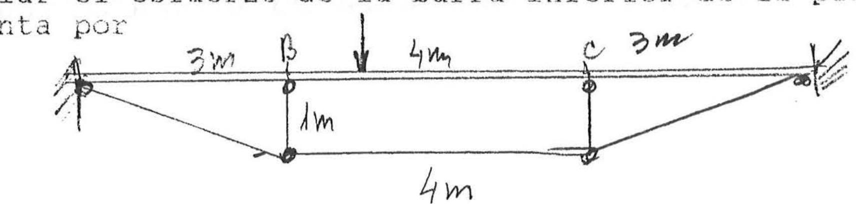
16 62

17 64

18 68

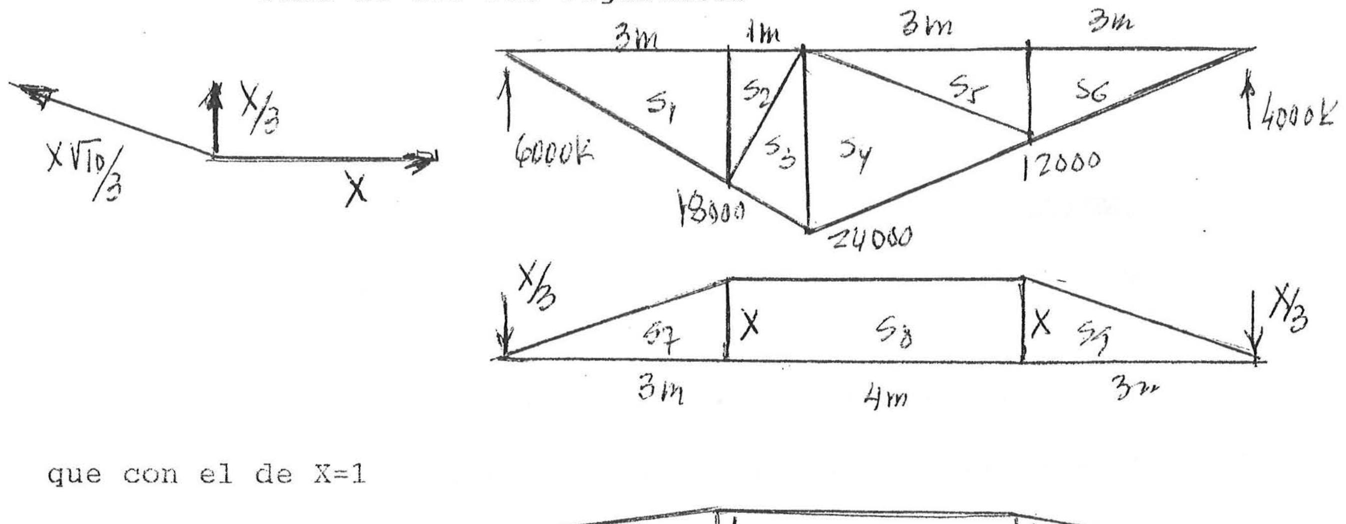
EJERCICIO nº7

Calcular el esfuerzo de la barra inferior de la pasarela, que se representa por

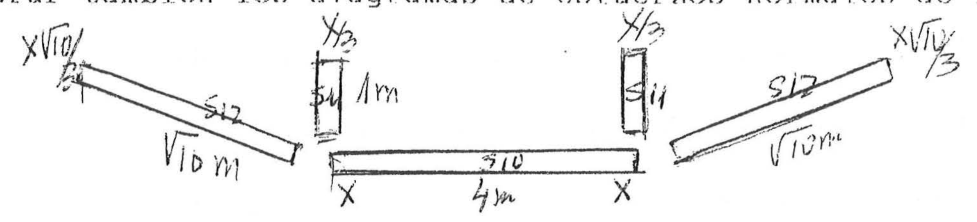


La viga tiene I=30000 cm4 y las barras s=20 cm2 .Se supone el mismo

Solución: Las barras producen una hiperestaticidad,y la estructura se convierte en isostática admitiendo que se conoce X,el esfuerzo de la barra horizontal inferior, y descomponiendolo respeto a las otras barras da unos empujes ascendentes de valor X en los puntos B y C.El diagrama de momentos se compone de la suma de los dos siguientes



que con el de X=1



nos sirve para operar con el Método de las SY,al expresar que la separación relativa de dos secciones contiguas del tirante son cero.Se deben considerar también los diagramas de esfuerzos normales de las barras:

Así tenemos las áreas y ordenadas

Nº	S	y(X=1)	Nº	S	y(X=1)	Nº	S	y(X=1)
1	27000/EI	-2/3	5	18000/EI	-1	9	1.5X/EI	2/3
2	9000/EI	-1	6	18000/EI	-2/3	10	4X/ES	1
3	12000/EI	-1	7	1.5X/EI	2/3	11	2xX/ES	1/3
4	36000/EI	-1	8	4X/EI	1	12	2x10X/ES	10/3

que da la ecuación

$$-105000 + 6X + (4+2/9+20\ \ 10/9)*X*I/S=0$$

Como las áreas de los diagramas dan los resultados en k*m2 pasaremos también a estas unidades la relación

$$I(cm4)/S(cm2)= 30000*10^{(-8)}m4/20*10^{(-4)}=0.15$$

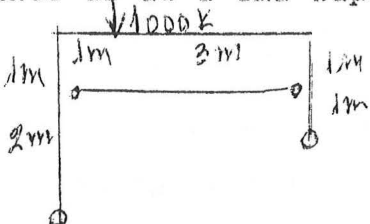
por lo que $(6+0.15*11.24950591)*X=105000$ y $X=13658$ k.

Si interesara saber el alargamiento de esta barra suponiendo E=2.10^6 k/cm2 de la definición de este módulo

$E= (X/S)/(d/l)$ se deduce $d= (X*l)/(E*S)=400*13658/(20*E)=0.1356$ cm.

EJERCICIO nº 8

Comparar la importancia de colocar el tirante en el pórtico adjunto, sabiendo que el momento de inercia de las barras es de I=800 cm4 y que la sección del tirante es de 2 cm2 suponiendo el mismo E.



Solución= Del sistema isostático de ecuaciones observamos

$$V + V' - 1000 = 0 \qquad H + H' = 0 \qquad 4\,V - 3000 - H = 0$$

por lo que además de la incognita del tirante X escogemos $H' = Y$ quedando entonces

$$H = -\,Y$$
$$V = (3000 - Y)/4 = 750 - 0.25\,Y$$
$$V = 1000 - 750 + 0.25\,Y = 250 + 0.25\,Y$$

para dibujar los diagramas de momentos

Observese que V tiene dos diagramas, uno numérico y otro en función de Y, que sumándose éste al de H=-Y resulta un único diagrama representativo de Y, en el que haciendo Y=1 se pueden medir las ordenadas correspondientes a los centros de gravedad de todas las áreas de momentos. Considerando además el diagrama de tracción del tirante, no se olvide que este diagrama su superficie debe dividirse por ES, mientras que los demás lo deben de hacer por EI.Resulta más cómodo multiplicar este diagrama de tracción por I/S = 800(cm4)/ 2(cm2)= 4x10^(-2) m2= 0.04 m2

Aplicando el Método de las SY quedan las áreas y ordenadas

Nº	S	y(X=1)	y(Y=1)
1	6000	-1	7/3
2	4500	1	-2.25
3	0.5X	2/3	-8/3
4	4X	1	-2.5
5	0.5X	2/3	-5/3
6	2Y	0	4/3
7	2Y	-0.5	2.5
8	0.5Y	-2/3	8/3
9	8Y	-1	2.5
10	2Y	-1	8/3
11	0.5Y	-2/3	5/3
12	Y	-0.5	1.5
13	0.5Y	0	2/3
14	4X(I/S)	1	0

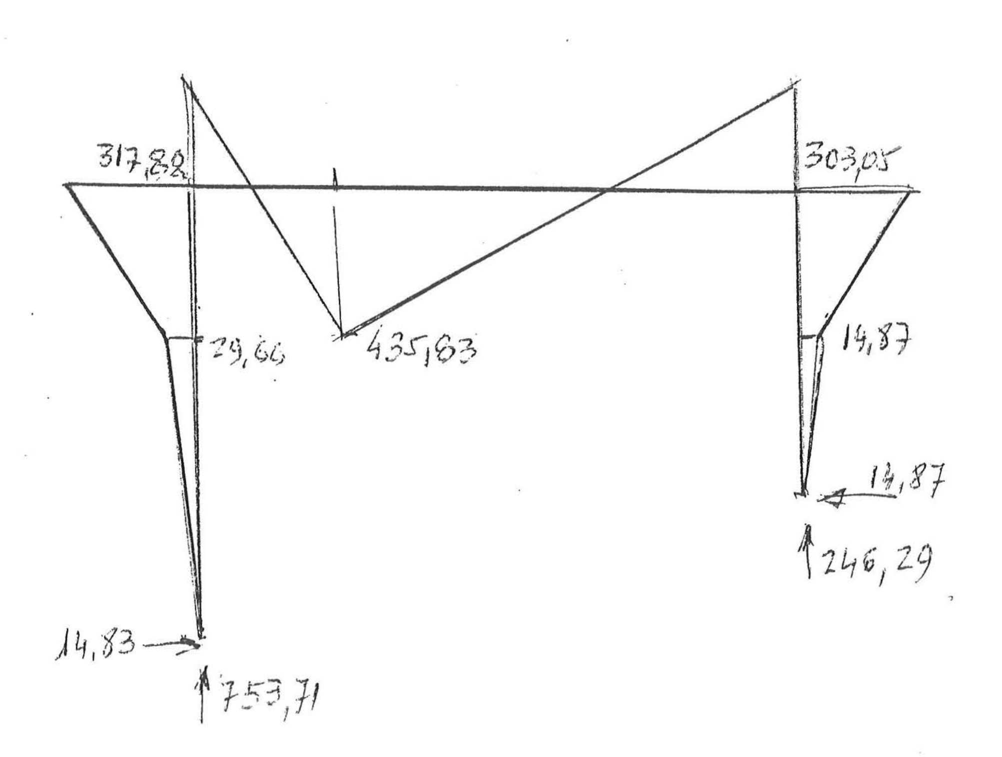
Expresando con el método que los desplazamientos de X e Y son nulos queda el sistema

$$4.8233\ X - 12.66\ Y = 1500$$
$$-12.66\ X + 37\ Y = -3875$$

que resuelto da X = 273.3793 k. Y = -H = -14.8347 k

y por lo tanto V = 750 - 0.25 Y = 753.708 k. y V = 246.292 k.

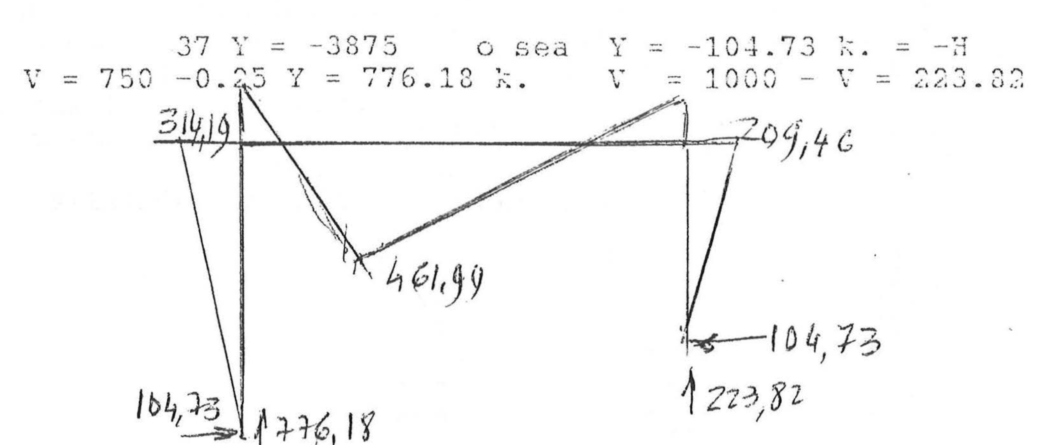
que sustituidos en sus diagramas y sumados al numérico queda



De suprimir el tirante el sistema se reduce a

37 Y = -3875 o sea Y = -104.73 k. = -H

V = 750 -0.25 Y = 776.18 k. V = 1000 - V = 223.82



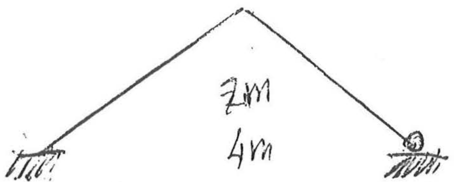
Observese las diferencias:

1ª El cable reduce los empujes H en las rótulas de apoyo en el terreno

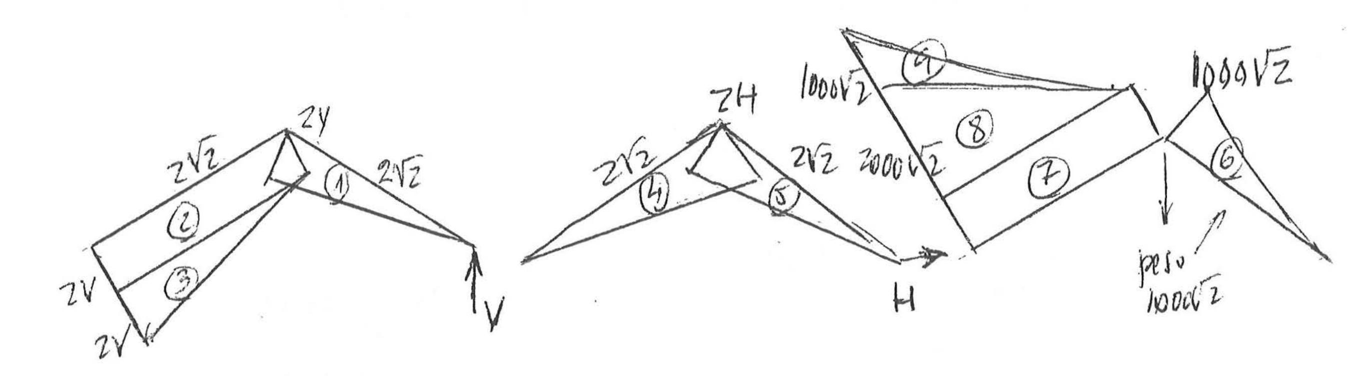
2ª También reduce el cable los momentos en los pilares,sobre todo en las zonas del cable hasta las rótulas.

EJERCICIO nº 9

Calcular los diagramas de momentos y de cortantes en la cercha con peso propio de 500 k/m.



Solución= Al aplicar el Método de las SY, expresamos que los desplazamientos de la rótula (horizontal y vertical) son cero, considerando que si se conocieran H y V tenemos los siguientes diagramas en un voladizo empotrado a la izquierda



Nº	S	y(V=1)	y(H=1)
1	2 2 V	4/3	4/3
2	4 2 V	3	1
3	2 2 V	10/3	2/3
4	2 2 H	8/3	4/3
5	2 2 H	4/3	4/3
6	4000/3	-1.5	-1.5
7	4000	-3	-1
8	4000	-10/3	-2/3
9	4000/3	-3.5	-0.5

que da el sistema

21.33 V + 8 H = 22627.417
8 V +5.3 H= 6599.6632

que resuelto da

V= 1363,7059 k.
H= -808,1220 k.

Las reacciones en el empotramiento serán

V + V1 = 2000x 2 = 2828.427 k.
V = 1363.706 k   V1= 1464.721 k.
M1+4000 2 - 4xV =0 por lo que   M1= -202.03 mk.

Momento en la cumbrera=

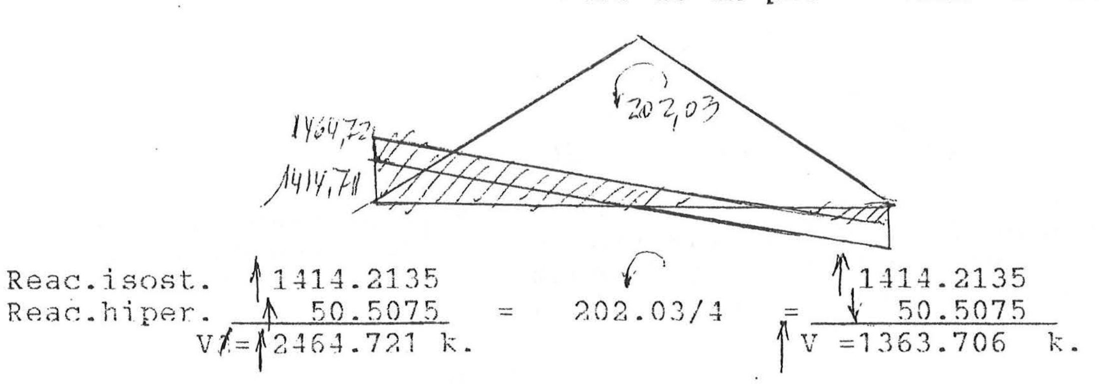
Mc= 1000 2 - 2xV + 2xH = 1414.2135-22727.41+1616.24 = 303.045 mk.

quedando el diagrama de momentos (Observese que H es negativo, contrario al estimado en un principio)

303,045
303,045
101,015
202,03
202,03

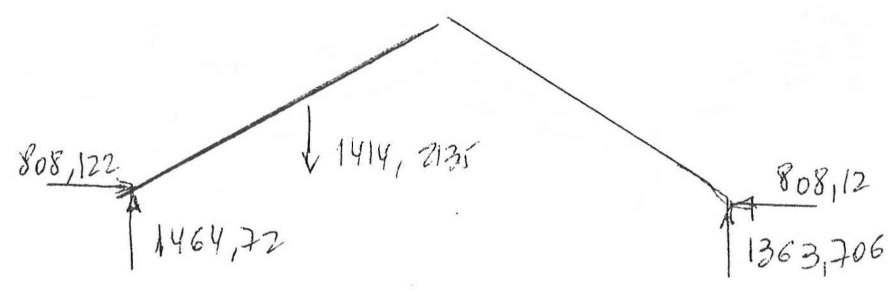
Diagrama de cortantes en el conjunto de la estructura

Peso de un par =500x2x 2 =1414.2135 k



Reac.isost. ↑1414.2135 ↑1414.2135
Reac.hiper. ↑ 50.5075 = 202.03/4 = ↓ 50.5075
V=↑2464.721 k. ↑V =1363.706 k.

en cada par



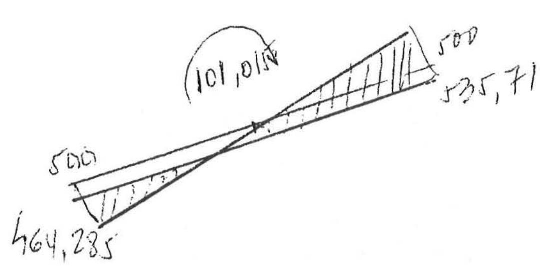
cos θ =cos 45º= $\sqrt{2}$ /2

1464.721 x $\sqrt{2}$ /2 =1035.714
-808.122 x $\sqrt{2}$ /2 =-571.428 = 464.285 k

Acción perpendicular al par = 500x2 $\sqrt{2}$ x cos 45º= 1000 k.

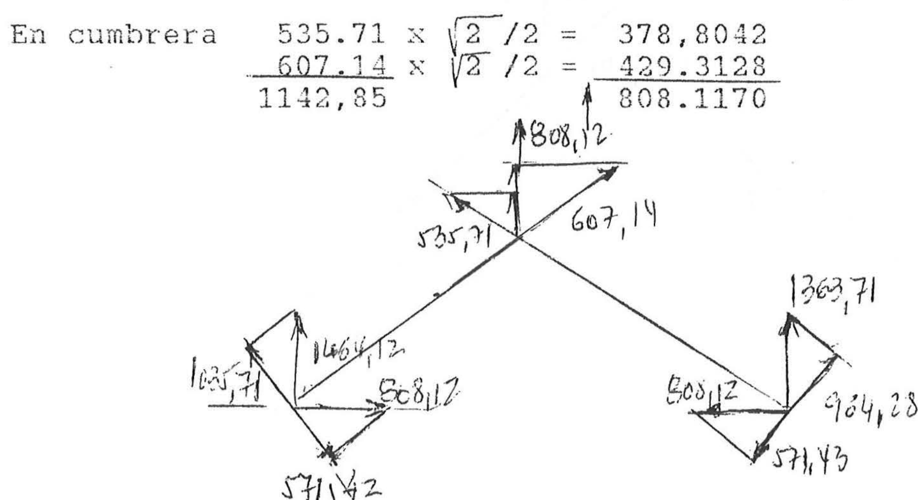
momento en par izq.=101.015
Reac.hip.= 101.015 /($\sqrt{2}$ x 2)= -35.715
Reac.isos= 500
464.285

mom.par der.= 303.045
303.045 / 2 $\sqrt{2}$ = -107.14
500
392.86



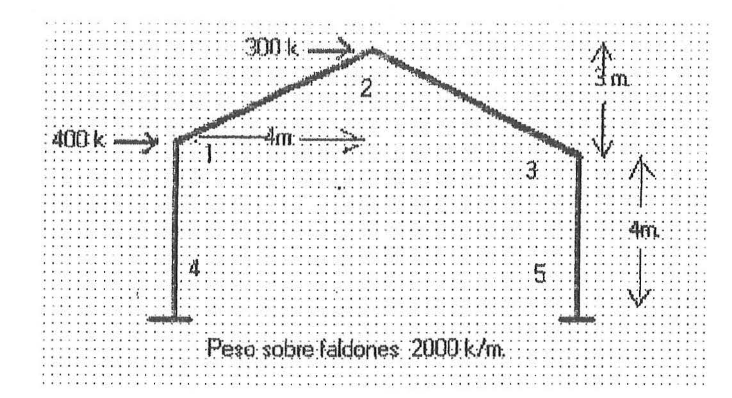
1363.706 x $\sqrt{2}$ /2 = 964,2857
808-122 x $\sqrt{2}$ /2 = -571.4285
392.86

En cumbrera 535.71 x $\sqrt{2}$ /2 = 378,8042
607.14 x $\sqrt{2}$ /2 = 429.3128
1142,85 808.1170

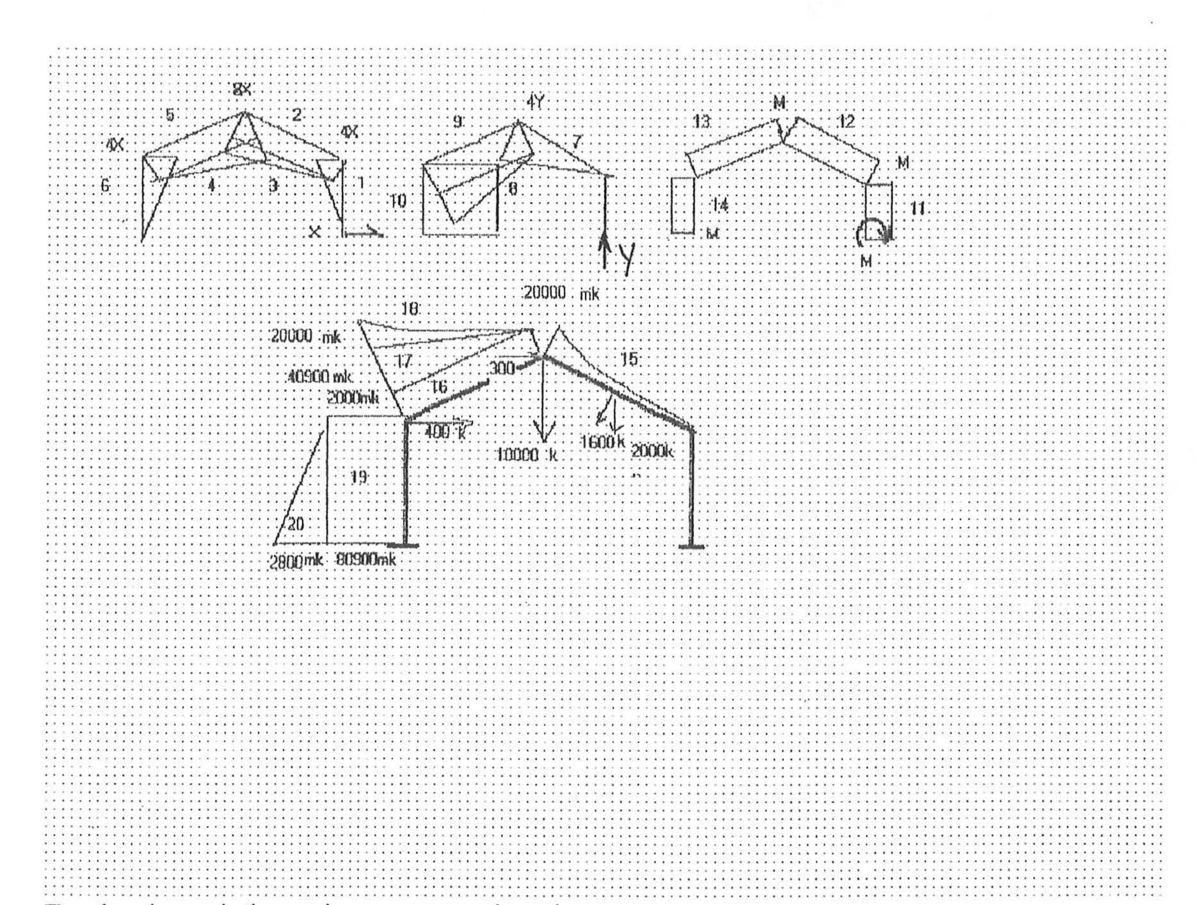


Ejercicio num 10 - pre SY

Sea el portico simetrico adjunto



Utilizando el Metodo de las SY considerando incognitas las tres reacciones del apoyo derecho X,Y,M,resultan los diagramas de momentos siguientes:



De donde se deducen las areas y ordenadas

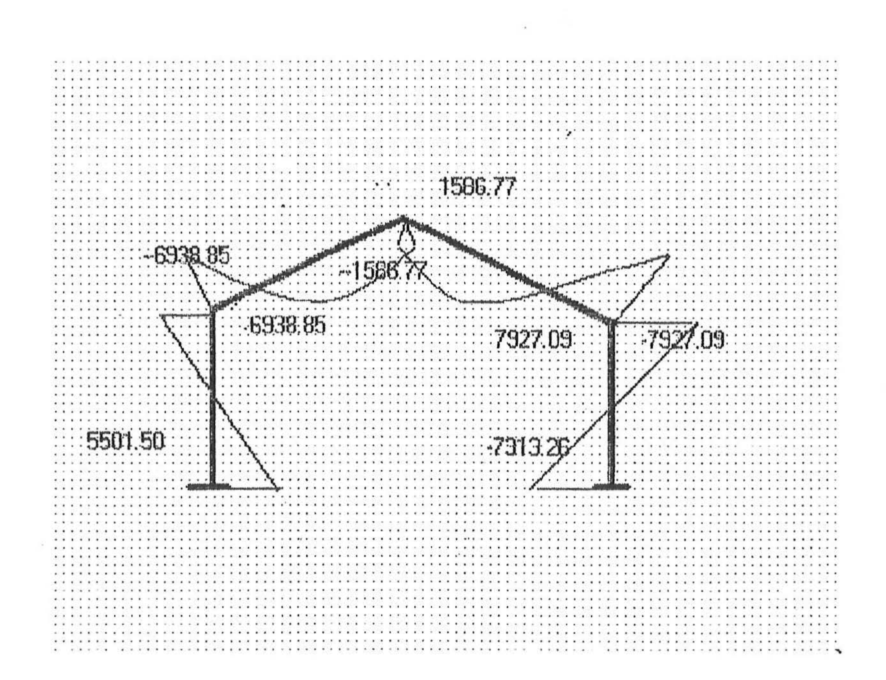
Num.	S	X=1	Y=1	M=1
1	8 X	8/3	0	-1
2	20 X	5.5	2	-1
3	7.5 X	6	8/3	-1
4	7.5 X	6	5.33	-1
5	20 X	5.5	6	-1

6	8 X	8/3	8	-1
7	10 Y	6	8/3	-1
8	10 Y	5	6.66	-1
9	20 Y	5.5	6	-1
10	32 Y	2	8	-1
11	4 M	-2	-8	1
12	5 M	-5.5	-6	1
13	5 M	-5.5	-2	1
14	4 M	-2	0	1
15	33333.333	-6.25	-3	1
16	100000	-5.5	-6	1
17	102250	-5	-6.66	1
18	33333.333	-4.75	-7	1
19	323600	-2	-8	1
20	5600	-4/3	-8	1

que da origen al expresar la nulidad de los desplazamientos de las incognitas al siguiente sistema de ecuaciones

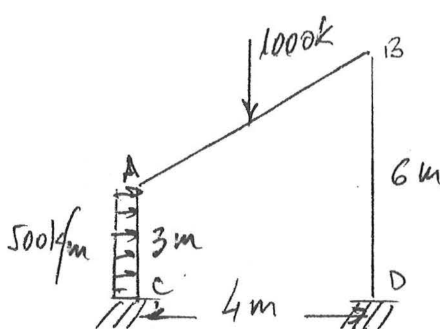
X	Y	M		IND.
352.666	284	-71	=	2082583
284	469.333	-72	=	4248600
-71	-72	18	=	-598116.6666

que resuelto da X = -3810.09 k. Y = 10236.03 k. M = -7313.24 mk.
que sustituyendo estos valores en sus respectivos diagramas de momentos y sumandolos con el de cargas da el resultante de la estructura

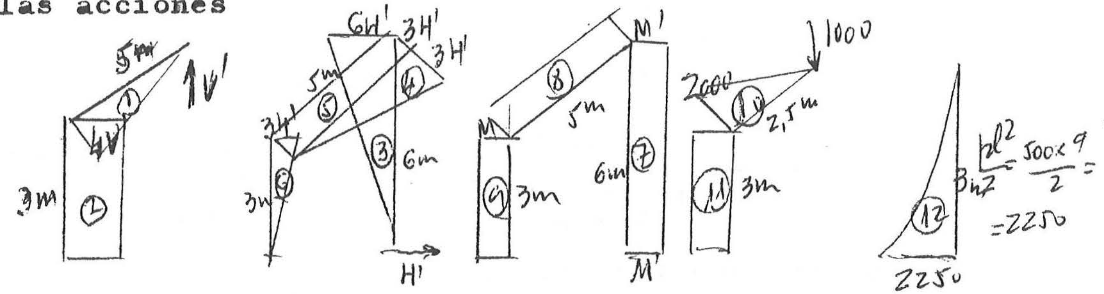


Ejercicio nº 11.

Calcular los diagramas de momentos y de cortantes en el pórtico



Solución : Expresando por incognitas las reacciones V', H'y M'del apoyo derecho, la estructura se convierte en isostática con los diagramas de momentos de cada una de las acciones



Expresando que los desplazamientos de las incognitas son cero se obtiene al aplicar el Método (que al estar igualadas a cero se puede prescindir de los denominadores de las áreas EI)

nº	Areas	y(V'=1)	y(H'=1)	y(M'=1)
1	10 V	8/3	4	-1
2	12 V	4	1.5	-1
3	18 H	0	4	-1
4	7.5 H	4/3	5	-1
5	15 H	2	4.5	-1
6	4.5 H	4	2	-1
7	6 M	0	-3	1
8	5 M	-2	-4.5	1
9	3 M	-4	-1.5	1
10	2500	-10/3	-3.5	1
11	6000	-4	-1.5	1
12	2250	-4	-0.75	1

resulta el sistema

$$\frac{224}{3} V' + 58 H' - 22 M' = \frac{124000}{3}$$

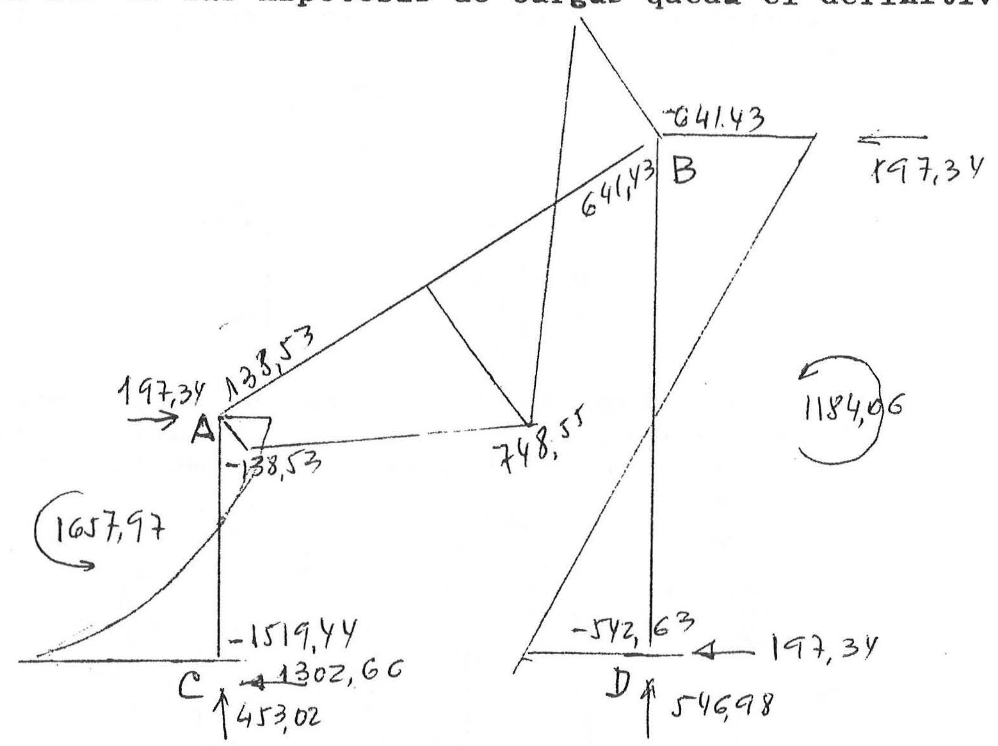
$$58 V' + 186 H' - 45 M' = 19437.5$$

$$-22 V' - 45 H' + 14 M' = -10750$$

que resuelto da

$V' = 546.98$ k.
$H' = -197,34$ k.
$M' = -542,63$ mk.

Sustituyendo estos valores en sus diagramas y sumandolos con los de las hipótesis de cargas queda el definitivo



En el nudo A se tiene

Empuje horizontal isostático = $\frac{500 \times 3}{2}$ = 750 k

Empuje hor. hiperestático= $\frac{-138,53-1519,44}{3}$ = 552.66 k.

Empuje en A = 750 - 552.66 = 197.34 k

que está equilibrado con el empuje en B que vale

-641.43 - 542.63 = 1184,06 /6 = 197.34

En el nudo C igualmente

Empuje hor. isostático = 750 k.
Empuje hor. hiperest. = 552.66 K
Empuje en C = 750 -- 552.66 = 1302.66 K

y por lo tanto la reacción en C es contraria = 1302.66 K que con la reacción que se produce en D = $\frac{1184,06}{6}$ = 197,34 equilibran horizontalmente al empuje sobre AC = 1500 K.

Las reacciones verticales en C y D son

Isostáticas V i. = 500 $\frac{1000}{2}$ = V'i. = 500

hiperestát= -197.34x3
138.53
641.43
suma 187.94

V h. = 46.98 $\frac{187.94}{4}$ = V'h.= 46.98

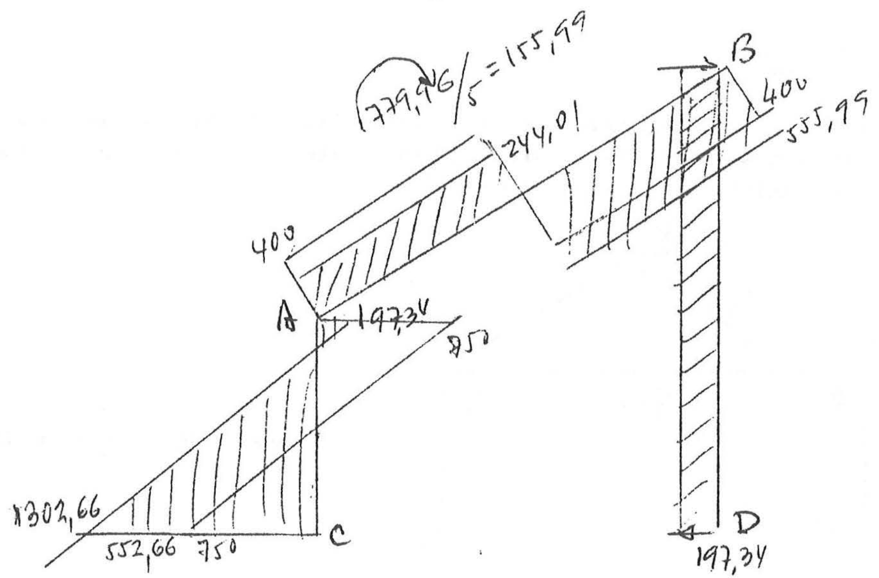
Reacciones totales V_t= 453,02 V'_t= 546.98

Cuya suma da los 1000 k del dintel.

Otra manera de obtener estas hiperestáticas es de sumar los momentos de la estructura

1500 x 1.5 -1519,44 -542.63 =187.94

El diagrama de cortantes los dibujamos añadiendo a los isostáticos los hiperestáticos de cada barra:



Comprobación de V = Tomando momentos respecto a B y suponiendo incognita V el equilibrio obliga a

$$4V + 1302.66 \times 6 - 1519{,}44 - 1500 \times 4.5 - 1000 \times 2 + 641.43 = 0$$

de donde $V = \dfrac{1812.05}{4} = 453{,}01$ k

Comprobación de V'= Tomamos momentos respecto a A e incognita V'

$$-4V' + 197{,}34 \times 3 - 542{,}63 + 138{,}53 + 1000 \times 2 = 0$$

$$V' = \frac{2187{,}92}{4} = 546.98 \text{ k}$$

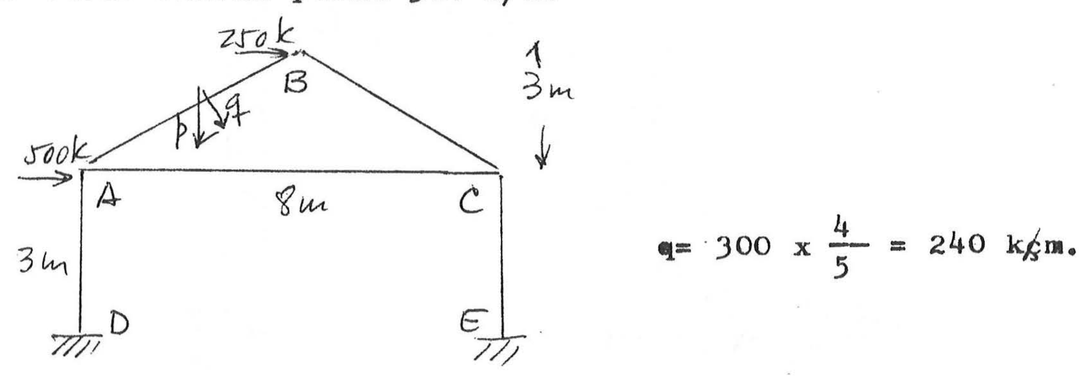
Conclusiones de este ejerccio

1ª) Para tomar momentos respecto al nudo B, debe tenerse en cuenta no sólo las reacciones V y H en C sino tambien los momentos en C y en B (los de A se anulan) y de esa manera se obtiene el equilibrio

2ª) Las reacciones verticales hiperestáticas no solo están producidas por los momentos del extremo del dintel AB, sino que al no ser horizontal colabora el momento del empuje en A multiplicado por la diferencia de ordenadas entre B y A.

Ejercicio nº 12

Determinar los diagramas de momentos y de cortantes en la estructura adjunta suponiendo que salvo los pilares las otras barras pesan 300 k/m.



$$q = 300 \times \frac{4}{5} = 240 \text{ k/m.}$$

Solución : Para aplicar SY daremos un corte en la barra AC junto al nudo C, además de expresar las incognitas en E, quedando la estructura isostática con los diagramas de momentos siguientes:

que dan las áreas y ordenadas medidas en sus centros de gravedad para las incognitas igualadas a uno.

nº	S	y(X=1)	y(Y=1)	y(M=1)	y(X′=1)	y(Y′=1)	y(M′=1)
1	4.5X	2	0	-1	0	0	0
2	15X	4.5	2	-1	-1.5	-2	1
3	7.5X	5	8/3	-1	-2	-8/3	1
4	15X	4.5	6	-1	-1.5	-6	1
5	7.5X	5	16/3	-1	-2	-16/3	1
6	4.5X	2	8	-1	0	0	0
7	10Y	5	8/3	-1	-2	-8/3	1
8	10Y	4	20/3	-1	-1	-20/3	1
9	20Y	4.5	6	-1	-1.5	-6	1
10	24Y	1.5	8	-1	0	0	0
11	3M	-1.5	0	1	0	0	0
12	5M	-4.5	-2	1	1.5	2	-1
13	5M	-4.5	-6	1	1.5	6	-1
14	3M	-1.5	-8	1	0	0	0
15	7.5X′	-5	-8/3	1	2	8/3	-1
16	7.5X′	-5	-16/3	1	2	16/3	-1
17	10Y′	-5	-8/3	1	2	8/3	-1
18	20Y′	-4.5	-6	1	1.5	6	-1
19	10Y′	-4	-20/3	1	1	20/3	-1
20	32Y′	0	0	0	0	16/3	-1
21	5M′	4.5	2	-1	-1.5	-2	1
22	5M′	4.5	6	-1	-1.5	-6	1
23	8M′	0	0	0	0	-4	1
24	5000	-5.25	-3	1	2.25	3	-1
25	15000	-4.5	-6	1	1.5	6	-1
26	15000	-4	-20/3	1	1	20/3	-1
27	5000	-3.75	-7	1	0.75	7	-1
28	36000	-1.5	-8	1	0	0	0
29	25600	0	0	0	0	-6	1
30	28800	-1.5	-8	1	0	0	0
31	1875	-4	-20/3	1	0.75	20/3	-1
32	2250	-1.5	-8	1	0	0	0
33	3375	-1	-8	1	0	0	0

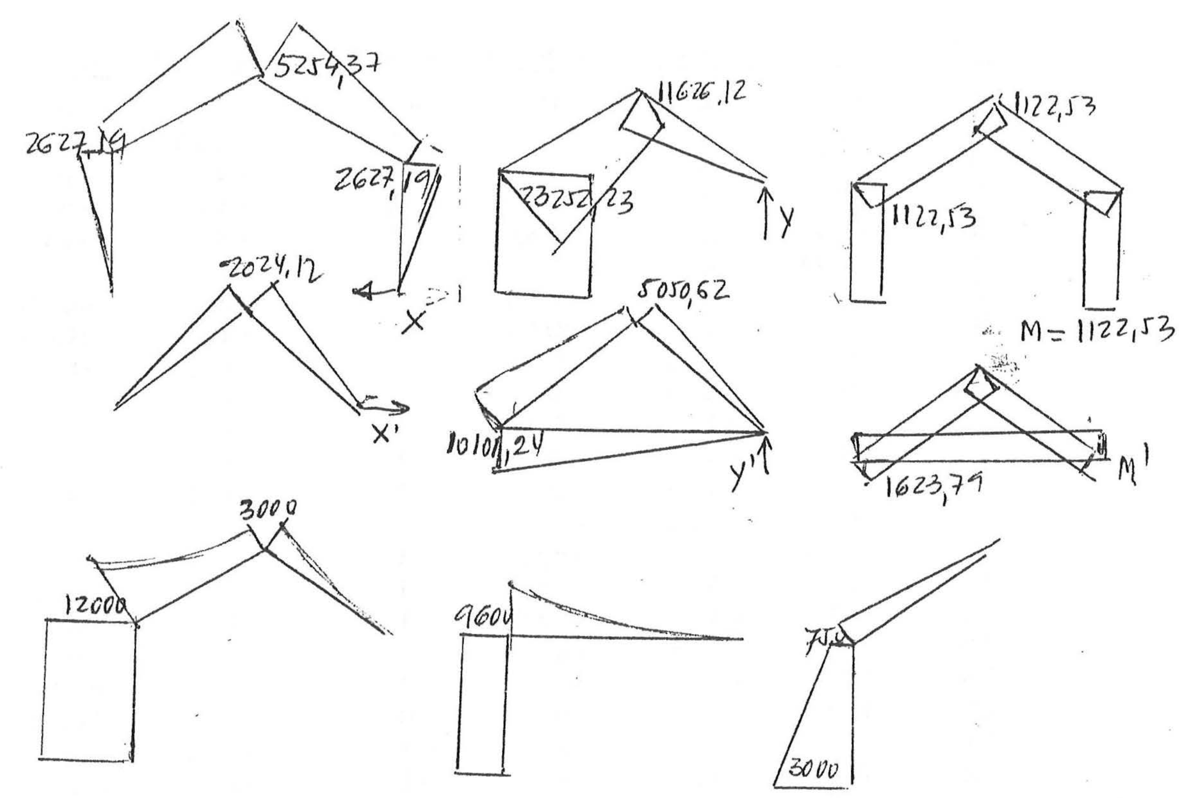
Expresando que los desplazamientos de las incognitas son cero resulta el sistema simétrico

X	Y	M	X′	Y′	M′	
228	+216	-54	-75	-180	+45	= 283950
216	405,3	-64	-60	-213,3	40	= 815900
-54	-64	16	15	40	-10	= -112300
-75	-60	15	30	60	-15	= -53906,25
-180	-213.3	40	60	384	-72	= -98900
45	40	-10	-15	-72	18	= 16275

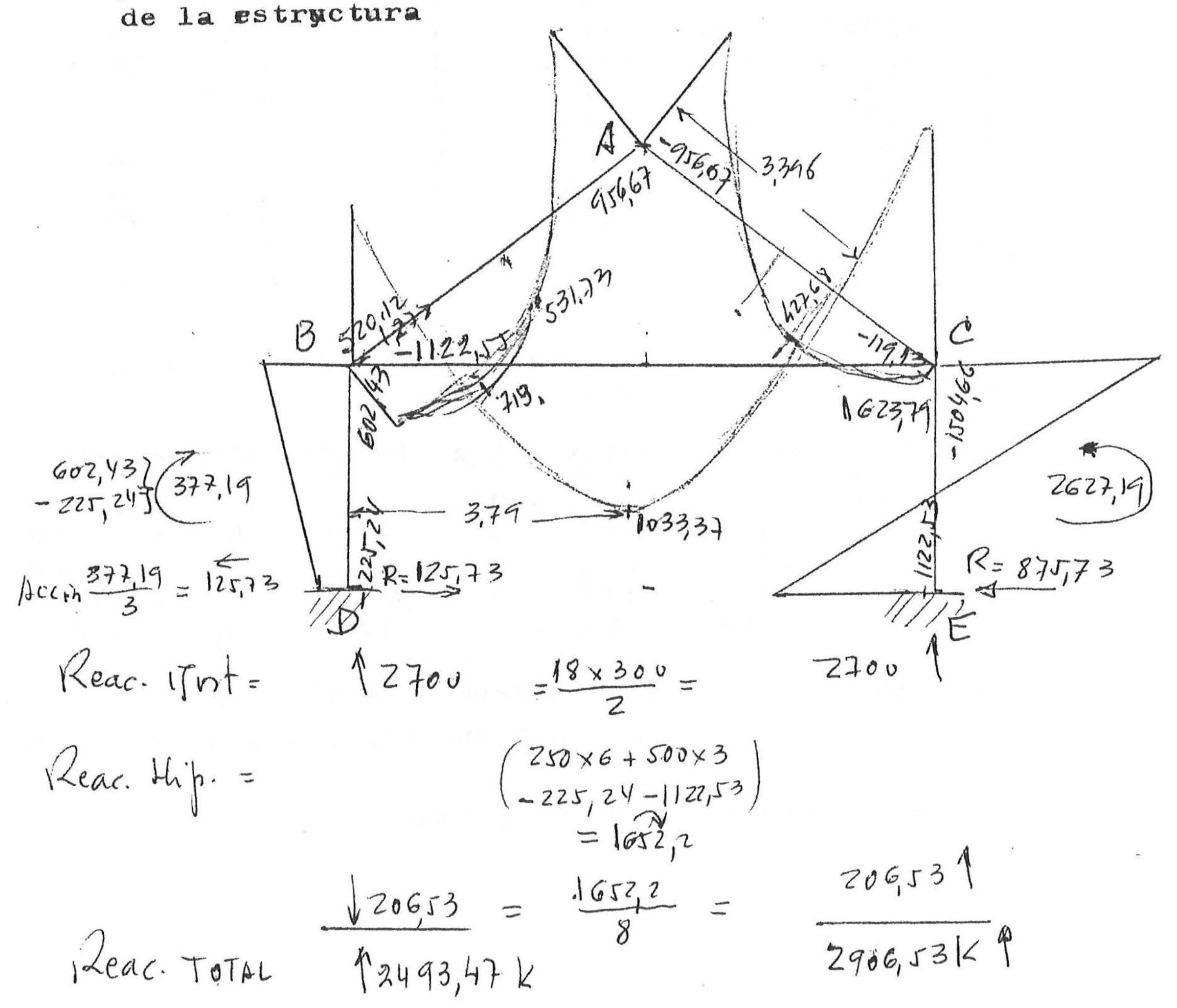
que resuelto da X=-875,7288 Y=2906,529 M=-1122,527

X′= 674,7078 Y′=1262,655 M′=1623.786

que sustituidos en sus diagramas [illegible]



y sumandolos todos dan el verdadero diagrama de momentos de la estructura



Reac. Isost = ↑2700 = 18 x 300 / 2 = 2700 ↑

Reac. Hip. = (250 x 6 + 500 x 3 - 225,24 - 1122,53) = 1652,2

↓206,53 = 1652,2 / 8 = 206,53 ↑

Reac. TOTAL ↑2493,47 K 2906,53 K ↑

Comprobaciones de V

Tomando momentos respecto a E

8V -225,24 + 500x3 + 250x6 -18x300x4 -1122,53=0

o sea $V = \frac{19947,77}{8} = 2493,47$ k

Momentos respecto a C

8V-125.73 x 3 -225,24 + 250 x3 -18x300x4= -1504,66

de donde igualmente $V = \frac{19947.76}{8} = 2493,47$ k

Momentos respecto a A

4V -125,73x6 -225,24 -500x3 +875,73x6 -2906,53x4 -
- 1122,53 =0

$V = \frac{9973,89}{4} = 2493,47$ k.

Observese que para llegar al nudo A hay que recorrer dos caminos, y se deben de considerar las reacciones en el nudo E además de las del D.

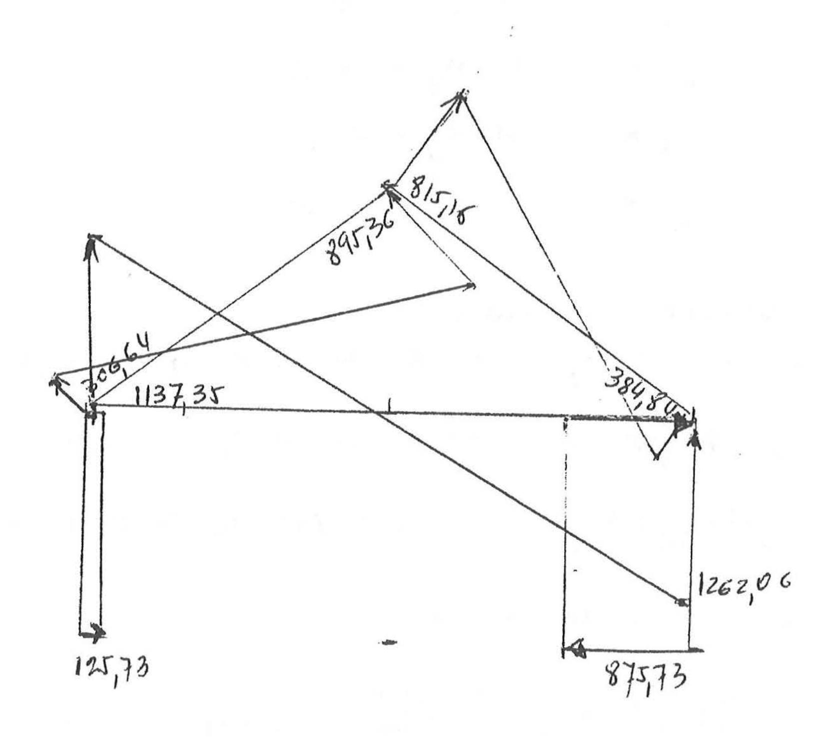
Comprobaciones de V'

Como se harían de la misma manera , utilizaremos una sola tomando momentos respecto a B

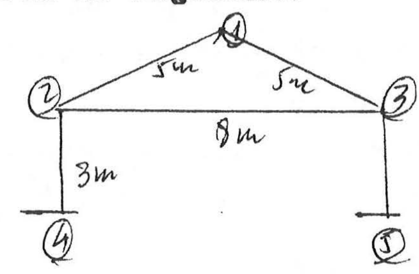
-8V'+875,73x3-1122,53+250x3+18x300x4 =602,43

de donde $V' = \frac{23252,23}{8} = 2906,53$ k

Diagrama de Cortantes



Si este problema lo quisieramos comprobar por el Método de las Rotaciones, que indudablemente es más corto nos encontraríamos con lo siguiente



$K_{12} = K_{13} = \frac{4EI}{5}$ 24 $K_{23} = \frac{4EI}{8} =$ 15 $K_{24} = K_{35} = \frac{4EI}{3} =$ 40

$\frac{p.l^2}{12} = \frac{300 \times 64}{12} = 1600$ $\frac{q.l^2}{12} = \frac{240 \times 25}{12} = 500$

$M_{12} = 500 + 24\,\theta_1 + 12\,\theta_2$

$M_{21} = -500 + 12\,\theta_1 + 24\,\theta_2$

$M13 = -500 + 24\,\theta_1 + 12\,\theta_3$

$M31 = 500 + 12\,\theta_1 + 24\,\theta_3$

$M23 = -1600 + 15\,\theta_2 + 7.5\,\theta_3$

$M_{32} = 1600 + 7.5\,\theta_2 + 15\,\theta_3$

$M_{24} = 40\,\theta_2 - 20\,\Delta$

$M_{42} = 20\,\theta_2 - 20\,\Delta$

$M_{35} = 40\,\theta_3 - 20\,\Delta$

$M_{53} = 20\,\theta_3 - 20\,\Delta$

Equilibrio de nudos

$M_{12} + M_{13} = 48\,\theta_1 + 12\,\theta_2 + 12\,\theta_3 = 0$

$M_{21} + M_{23} + M_{24} = 12\,\theta_1 + 79\,\theta_2 + 7.5\theta_3 - 20\Delta - 2100 = 0$

$M_{31} + M_{32} + M_{35} = 12\,\theta_1 + 7.5\,\theta_2 + 79\,\theta_3 - 20\Delta + 2100 = 0$

Equilibrio de empuje

$\frac{M_{24} + M_{42}}{3} + \frac{M_{35} + M_{53}}{3} + 750 = 0$ o lo que esigual

$20\,\theta_2 + 20\,\theta_3 - 80/3\Delta + 750 = 0$

que da el sistema

$$\begin{array}{cccccccc} 48 & \theta_1 & 12 & \theta_2 & 12 & \theta_3 & 0 & \Delta & = 0 \\ 12 & & 79 & & 7.5 & & -20 & & = 2100 \\ 12 & & 7.5 & & 79 & & -20 & & = -2100 \\ 0 & & -20 & & -20 & & 80/3 & & = 750 \end{array}$$

que resuelto da

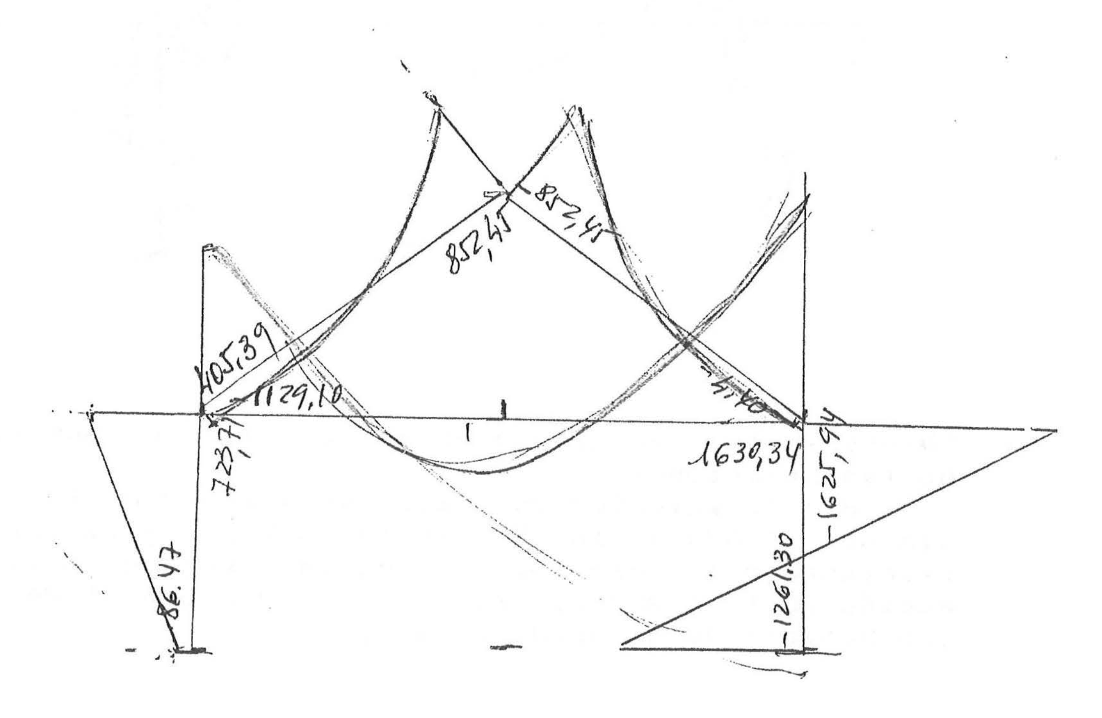
$\theta_1 = -5.56930693$

$\theta_2 = 40.50924323$

$\theta_3 = -18.23201551$

$\Delta = 44.83292079$

que sustituidos a su vez en las ecuaciones de los momentos resulta el diagrama de momentos



La diferencia que se observa con el realizado por el Método de las SY está en que el empuje 250 K que actúa en el nudo A, para aplicar el método de las Rotaciones se ha trasladado al nudo B.

Si se utiliza el Método de las SY para este supuesto del empuje total en B (750 K) es suficiante operar con el sistema que se encontró suprimiendo las áreas 31 y 32, quedando ahora como términos independientes

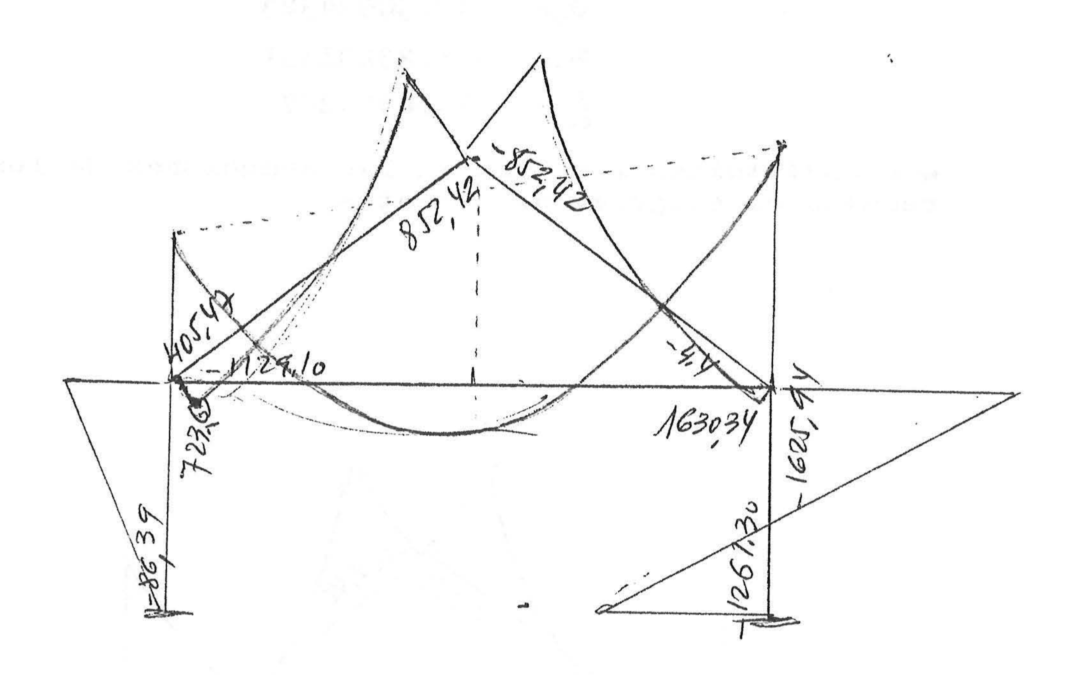
273075 / 785400 /-108175 / -52500 /-86400 /14400

que dan al resolver el sistema

X = -962,4126 Y = 2812,7884 M = -1261,2987

X'= 390,0350 Y'= 1262,655 M'= 1630,339

y sustituidos en sus diagramas y sumados se obtiene

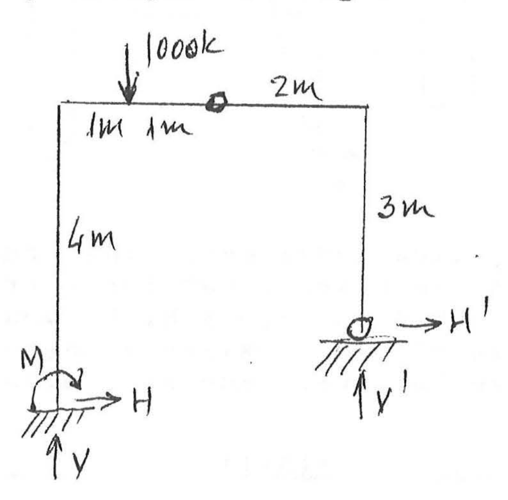


Observese la identificación con el obtenido por el Método de las Rotaciones.

Pero lo anterior ratifica que a pesar de la complejidad del Método de las SY, es mucho mejor para delimitar exactamente los efectos , en el caso que nos ocupa, de la acción en la cumbrera dek empuje 250 k.que el Método de las Rotaciones no puede resolver.

Ejercicio nº 13

Calcular y dibujar el diagrama de momentos en



Solución :

En esta estructura existen cinco incognitas en sus apoyos. Planteando el sistema de ecuaciones de la Está tica se tiene

$$\Sigma V = V + V' - 1000 = 0$$
$$\Sigma H = H + H' = 0$$
$$\Sigma M = 4V - H + M - 3000 = 0$$

y expresando el momento nulo en la rótula del dintel

$$M_A = 2V - 4H + M - 1000 = 0$$

por lo que al haber cuatro ecuaciones para cinco incognitas , es necesario adoptar una de éstas como independiente. Así se toma

$H' = X$ y entonces $H = -X$

y de las demás ecuaciones

$$4V + X + M - 3000 = 0$$
$$2V + 4X + M - 1000 = 0$$

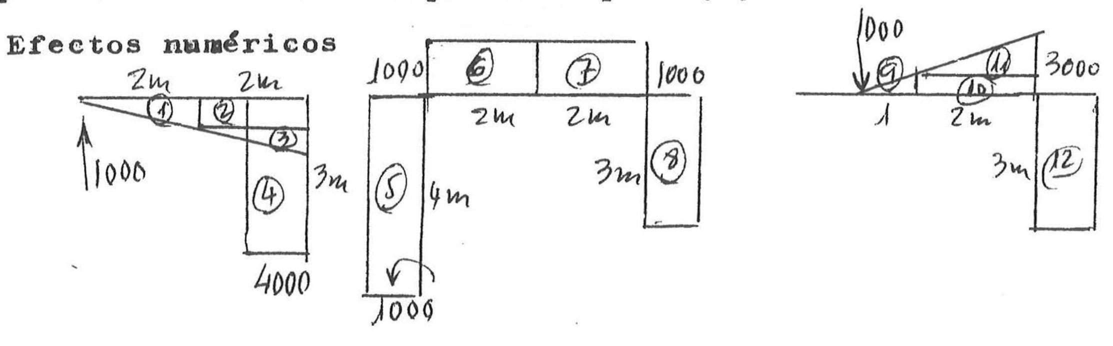
que al restarlas $2V - 3X - 2000 = 0$ o sea

$$V = 1000 + 1.5\ X$$

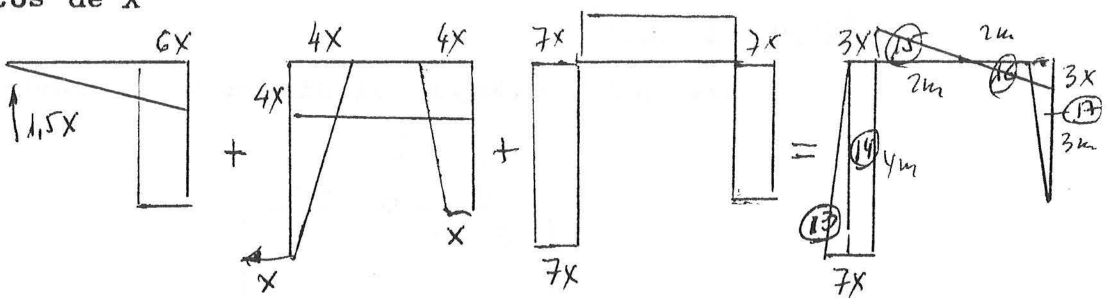
y $M = 1000 - 2V - 4X = -1000 - 7X$

Al dibujar ahora los distintos diagramas de las acciones y reacciones , se observa la necesidad de dibujar dos series de diagramas , una para los numéricos y la otra para los valores multiplicados por X, y así

Efectos numéricos



Efectos de X

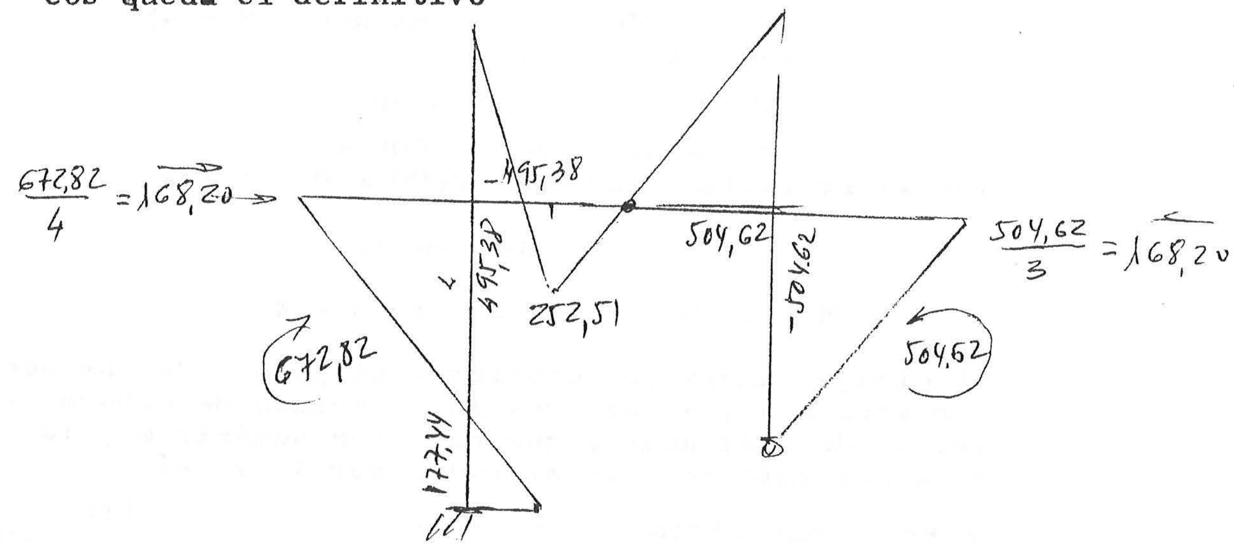


Como se ve, para poder medir las ordenadas en el diagrama de X = 1, se deben sumar los correspondientes a los producidos por X en V,H y M. La anulación del los diagramas por la rótula , obliga a descomponer los diagramas numéricos en las áreas que se indican, resultando por tanto

nº	S	y(X=1)	nº	S	y(X=1)
1	2000	-1	10	2000	-1.5
2	4000	1.5	11	2000	-2
3	2000	2	12	9000	-1.5
4	12000	1.5			
5	4000	5	13	8X	17/3
6	2000	1.5	14	12X	5
7	2000	-1.5	15	3X	2
8	3000	-1.5	16	3X	2
9	500	0.5	17	4.5X	2

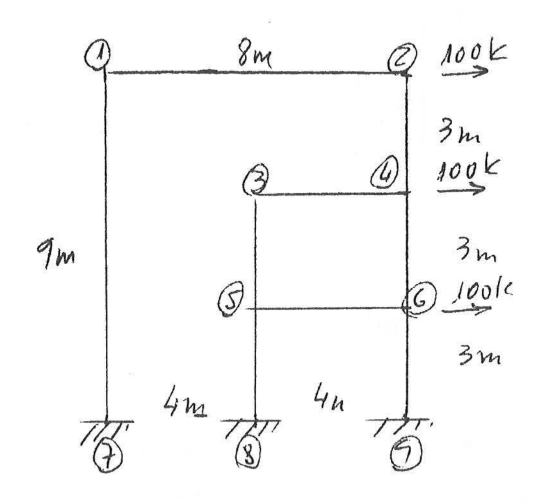
de donde $X = -\frac{63750}{379} = -168{,}2058$

que sustituido en su diagrama y sumado a los numéricos queda el definitivo



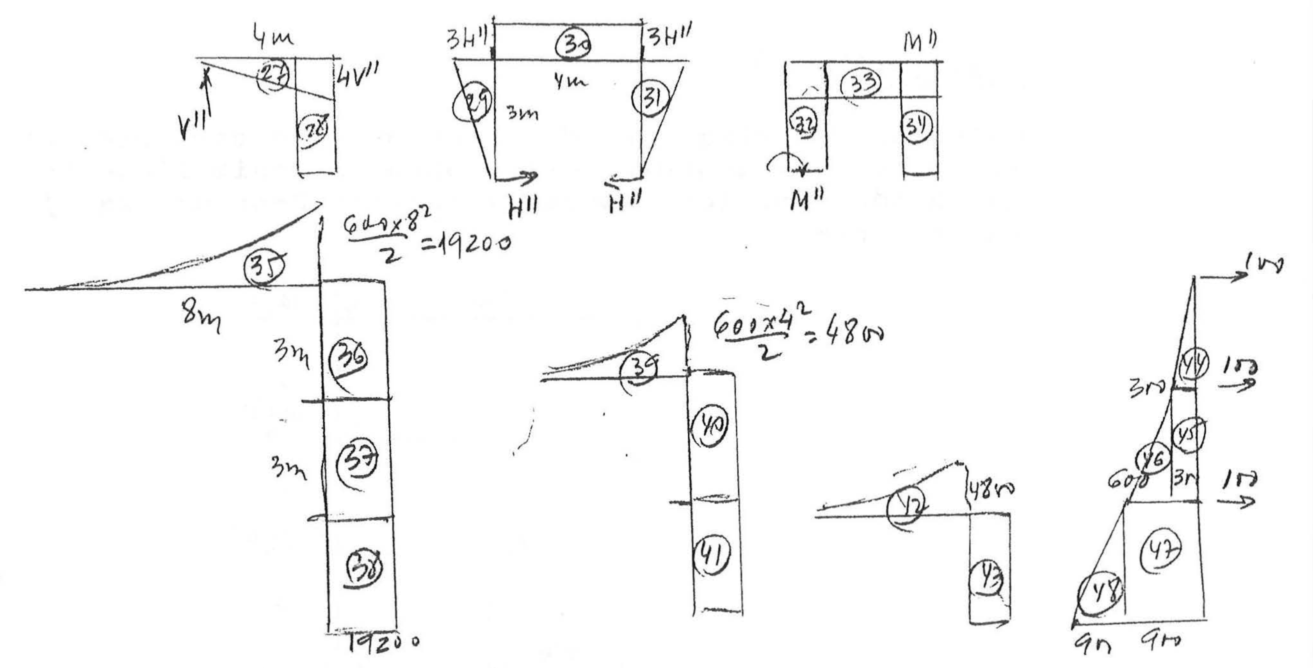
Ejercicio nº 14

Calcular los diagramas de momentos y de cortantes en la estructura adjunta, estudiando la posibilidad de que actúe o no los empujes laterales. Peso de las vigas 600 k/m.



Solución

Convertimos la estructura en isostática dándole cortes en los nudos 7,5 y 8 quedando los diagramas de momentos siguientes



que dan la tabla de áreas y ordenadas

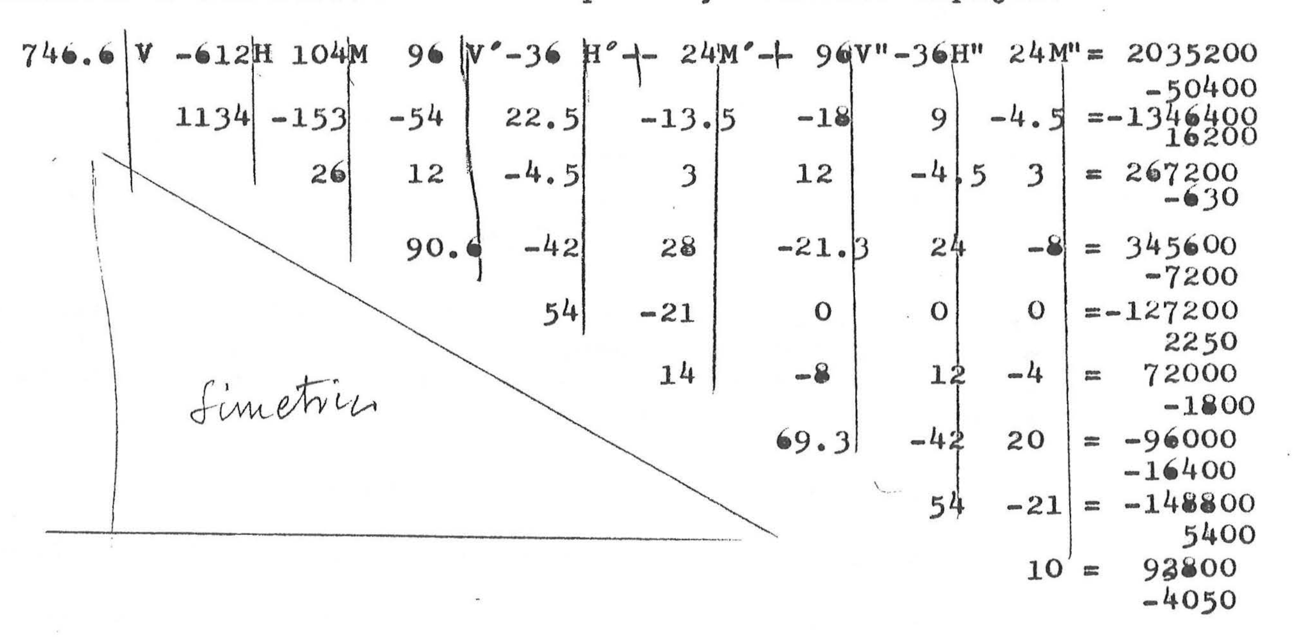
nº	S	y(V=1)	y(H=1)	y(M=1)	y(X'1)	y(H'1)	y(M'1)	y(X"1)	y(H"1)	y(M"1)
1	32V	16/3	-9	1	0	0	0	0	0	0
2	24V	8	-7.5	1	0	0	0	0	0	0
3	24V	8	-4.5	1	4	-1.5	1	0	0	0
4	24V	8	-1.5	1	0	0	0	4	-1.5	1
5	40.5H	0	6	-1	0	0	0	0	0	0
6	72H	-4	9	-1	0	0	0	0	0	0
7	4.5H	-8	8	-1	0	0	0	0	0	0
8	18H	-8	7.5	-1	0	0	0	0	0	0
9	4.5H	-8	5	-1	-4	2	-1	0	0	0
10	9H	-8	4.5	-1	-4	1.5	-1	0	0	0
11	4.5H	-8	2	-1	0	0	0	-4	2	-1
12	9M	0	-4.5	1	0	0	0	0	0	0
13	8M	4	-9	1	0	0	0	0	0	0
14	3M	8	-7.5	1	0	0	0	0	0	0
15	3M	8	-4.5	1	4	-1.5	1	0	0	0
16	3M	8	-1.5	1	0	0	0	4	-1.5	1
17	8V'	0	0	0	8/3	-3	1	0	0	0
18	12V'	8	-4.5	1	4	-1.5	1	0	0	0
19	8V'	0	0	0	8/3	0	1	-8/3	3	-1
20	4.5H'	0	0	0	0	2	-1	0	0	0
21	12H'	0	0	0	-2	3	-1	0	0	0
22	4.5H'	-8	-5	-1	-4	2	-1	0	0	0
23	3M'	0	0	0	0	-1.5	1	0	0	0
24	4M'	0	0	0	2	-3	1	0	0	0
25	3M'	8	-4.5	1	4	-1.5	1	0	0	0
26	4M'	0	0	0	2	0	1	-2	3	-1
27	8V"	0	0	0	-8/3	0	-1	8/3	-3	1
28	12V"	8	-1.5	1	0	0	0	4	-1.5	1
29	4.5H"	0	0	0	0	0	0	0	2	-1
30	12H"	0	0	0	2	0	1	-2	3	-1
31	4.5H"	-8	2	-1	0	0	0	-4	2	-1
32	3M"	0	0	0	0	0	0	0	-1.5	1
33	4M"	0	0	0	-2	0	-1	2	-3	1
34	3M"	8	-1.5	1	0	0	0	4	-1.5	1

nº	S	y(V=1)	y(H=1)	y(M=1)	y(V'1)	y(H'1)	y(M'1)	y(V"1)	y(H"1)	y(M"1)
35	51200	-6	9	-1	0	0	0	0	0	0
36	57600	-8	7.5	-1	0	0	0	0	0	0
37	57600	-8	4.5	-1	-4	1.5	-1	0	0	0
38	57600	-8	1.5	-1	0	0	0	4	1.5	-1
39	6400	0	0	0	-3	3	-1	0	0	0
40	14400	-8	4.5	-1	-4	1.5	-1	0	0	0
41	14400	-8	1.5	-1	0	0	0	-4	1.5	-1
42	6400	0	0	0	3	0	1	-3	0	-1
43	14400	-8	1.5	-1	-4	0	0	-4	1.5	-1

y para estudiar los empujes hacen fqlta los datos que siguen

44	450	8	-7	1	0	0	0	0	0	0
45	900	8	-4.5	1	4	-1.5	1	0	0	0
46	900	8	-4	1	4	-1	1	0	0	0
47	2700	8	-1.5	1	0	0	0	4	-1.5	1
48	1350	8	-1	1	0	0	0	4	-1	1

De donde se obtiene al expresar que los desplazamientos son nulos el sistema, en ql que se han expresado los terminos independientes relativos a considerar solo los pesos y solo los empujes:



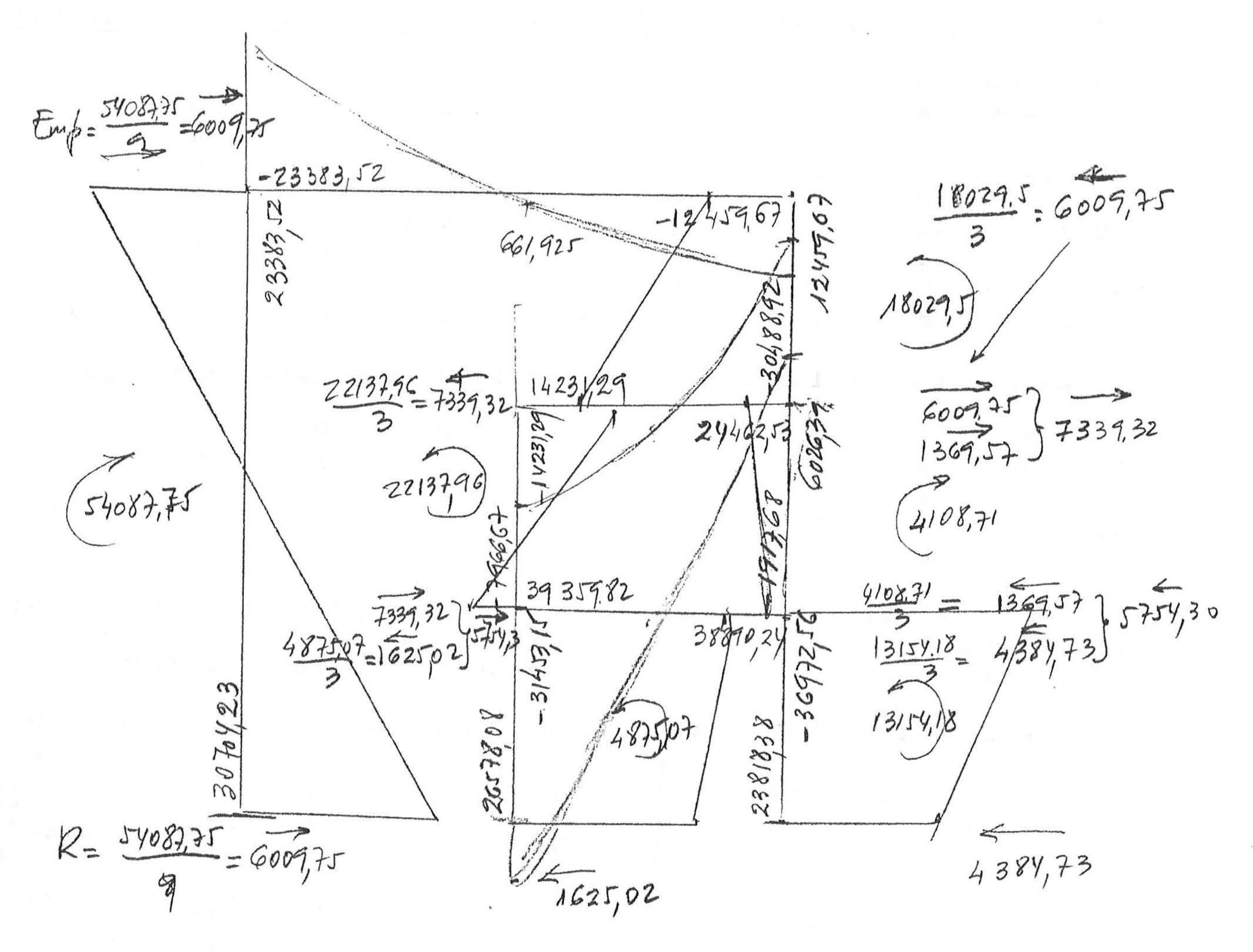
V	H	M	V'	H'	M'	V"	H"	M"	=
746.6 V	-612 H	104 M	96 V'	-36 H'	+ 24 M'	+ 96 V"	-36 H"	24 M"	= 2035200 -50400
	1134	-153	-54	22.5	-13.5	-18	9	-4.5	=-1346400 16200
		26	12	-4.5	3	12	-4.5	3	= 267200 -630
			90.6	-42	28	-21.3	24	-8	= 345600 -7200
				54	-21	0	0	0	=-127200 2250
					14	-8	12	-4	= 72000 -1800
						69.3	-42	20	= -96000 -16400
							54	-21	= -148800 5400
								10	= 93800 -4050

Simetrica

Con los primeros términos independientes se obtienen los valores

V = 6880,3989 V' = - 8473,4555 V" = -26835,9732
H = 6009,7509 H' = - 7379,3187 H" = -1625,0239
M = 30704,2323 M' = -7906,7661 M" = 26578,0861

que sustituidos en sus diagramas y sumados resuta el diagrama de momentos en la estructura, exclusivamente para la hipótesis de cargas en las vigas



Se han marcado los empujes en los dinteles. El estudio por separado de los empujes exteriores, se hace resolviendo el sistema con los segundos valores de términos independientes, resultando

V = -2,01689	V'= -330,5676	V" = -637,5773
H =232.221	H'= -324.1228	H" = -237.307
M = 1804,34	M'= -453,8449	M" = -490,1443

que operando igual que antes resulta el diagrama

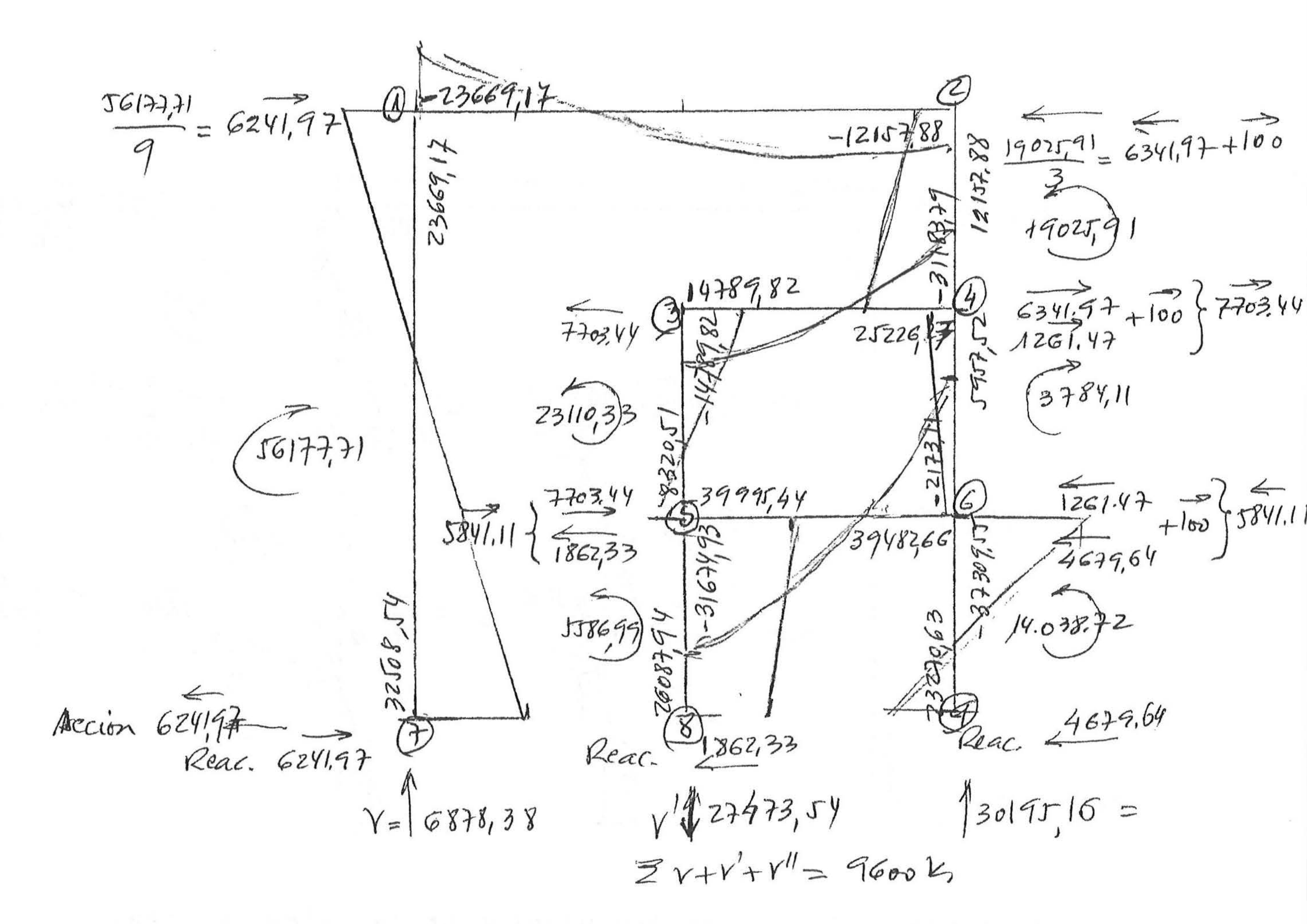
Observese en los distintos niveles de las vigas el equi librio con los empujes exteriores 100

$$\overrightarrow{232{,}22} + \overleftarrow{332{,}22} + \overrightarrow{100} = 0$$

$$\overleftarrow{324{,}12} + \overrightarrow{332{,}22} + \overleftarrow{108{,}10} + \overrightarrow{100} = 0$$

$$\overrightarrow{324{,}12} + \overleftarrow{237{,}31} + \overrightarrow{108.10} + \overleftarrow{294{,}91} + \overrightarrow{100} = 0$$

De querer considerar simultáneamente los pesos de las vigas y los empujes exteriores, el diagrama de momentos es la suma de los dos anteriores, resultando



Observese el equilibrio en cada nivel :

$\overrightarrow{6241{,}97} + \overleftarrow{6341{,}97} + \overrightarrow{100} = 0$

$\overleftarrow{7703{,}44} + \overrightarrow{6341{,}97} + \overrightarrow{1261{,}47} + \overrightarrow{100} = 0$

$\overrightarrow{7703{,}44} + 1862{,}33 + \overleftarrow{1261{,}47} + \overleftarrow{4679{,}64} + \overrightarrow{100} = 0$

<u>Comprobación de las reacciones verticales</u>

Reacción V en el nudo 7. la calculamos tomando

a) Momentos respecto al nudo 2

(8V -6241,97 x9 + 32508,54)- 600x8x4 -12157,88= 0

de donde $V = \frac{55027{,}07}{8} = 6878{,}38$ k.

b) Momentos respecto al nudo 5

(4V-6241,97 x3 +32508,54) + (1862,33x3 + 26087,94)+
+(-30195,16 x4 +23270,63 + 4679,64 x 3)+ 600x4x2x2 +
+ 100x6 + 100x3 =0

de donde $V = \frac{27513{,}53}{4} = 6878{,}38$ k.

c) Momentos respecto al nudo 8

(4V +32508,54)+26087,94 (-30195,16x4+23270,63)+100x9
+100x6+100 x3+600x8x2=0 V= 6878,38 k.

La reaeción V" en el nudo 9 se calcula
por a) tomando momentos respecto al nudo 1

$$-8\,V'' + (27473{,}54\times4 + 1862{,}33\times9 + 26087{,}94) + (4679{,}64\times9 + 23270{,}63) + 4800\times4 + 4800\times6 - 100\times3 - 100\times6 - 23669{,}17 = 0$$

de donde $V'' = \frac{241561{,}29}{8} = 30195{,}16$ k

o por b) tomando momentos respecto a otro nudo ,como el 3

$$-4V'' + 23270{,}63 + 4679{,}64\times6 + 32508{,}54 + 6241{,}97\times6 + 6878{,}38\times4 + 26087{,}94 + 1862{,}33\times6 + 488\times2 = 0$$

de donde $V'' = \frac{120780{,}63}{4} = 30195{,}16$ k.

Si se estudian los traslados de los empujes se observa

Del nivel 1-2 al 3-4

$$\overrightarrow{6241{,}97} + \overrightarrow{100} = \overrightarrow{6341{,}97}$$

porque los producidos por los momentos en la barra 2-4 forman par y entre ellos se anulan

En el nivel 3-4 hay carga acumulada en el nudo 4 de

valor $\overrightarrow{6341{,}97} + \overrightarrow{100} = \overleftarrow{6441{,}97}$

que lo equilibran los efectos hiperestáticos de las barras 3-5 y 4-6

$$\overleftarrow{7703{,}44} + \overrightarrow{1261{,}47} = \overleftarrow{6441{,}97}$$

Si se hace ahora el traslado al nivel 5-6 se tiene

se transmite los $\overrightarrow{6341{,}97}$ del nivel 1-2 y los $\overrightarrow{100}$ del 3-4, y se añaden los $\overrightarrow{100}$ de este nivel 5-6 dando un total de $\overrightarrow{6541{,}97}$ k , que lo equilibran los empujes hiperestáticos de los pilares 5-8 y 6-9

$$\overleftarrow{1862{,}33} + \overleftarrow{4679{,}64} = \overleftarrow{6541{,}97}\text{ k.}$$

Conclusiones

1ª) En cada nivel de una estructura existe equilibrio entre los empujes y las fuerzas deducidas de los momentos de los pilares adyacentes por encima y por debajo deaquél.

2ª) Los empujes isostáticos que se acumulan en un nivel son equilibrados por las fuerzas deducidas de los momentos de los pilares inmediatamente inferiores.

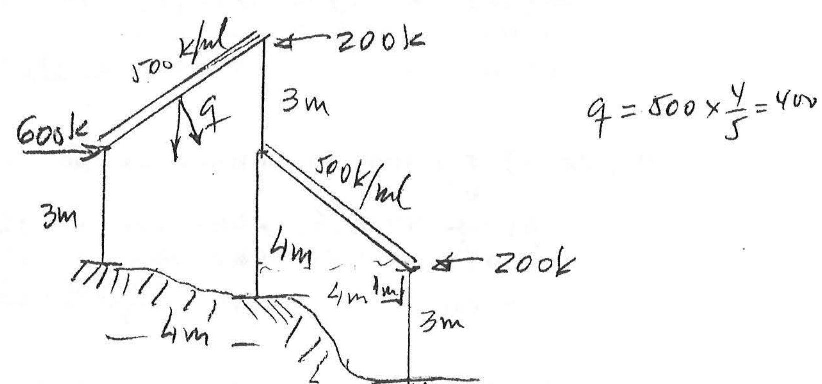
3ª) En las comprobaciones de las reacciones verticales tomando momentos respecto a un nudo deben de tenerse en cuenta

a) Si el momento se logra siguiendo un único camino (caso del ejercicio anterior al tomar momentos respecto a los nudos 1 o 2) el equilibrio se obtiene por los momentos que llegan por ese camino.

b) Si existen varios caminos (caso de los nudos 3 a 9) es necesario contar con todos los efectos que puedan proporcionar todos los caminos, despreciando los deun nudo intermedio si los momentos en el mismo se equilibran.

Ejercicio nº 15

Determinar èl diagrama de momentos en la estructura



Solución : Esta estructura estudiada por un procedimiento clásico podría presentar dudas de su comportamiento a los empujes. Por este método no hay que preocuparse porque a la estructura la hacemos isostática expresando las incognitas de los dos apoyos extremos, resultando los diagramas de momentos

y la única dificultad es hacer el cuadro de áreas y ordenadas, que aunque es fácil es lo único pesado

nº	S	y(X=1)	y(Y=1)	y(M=1)	y(X'=1)	y(Y'=1)	y(M'=1)
1	4.5X	2	0	-1	0	0	0
2	15X	4.5	-2	-1	0	0	0
3	7.5X	5	-8/3	-1	0	0	0
4	4.5X	5	-4	-1	0	0	0
5	9X	4.5	-4	-1	0	0	0
6	4.5X	2	-4	-1	5	4	-1
7	0.5X	2/3	4	1	-7/3	-4	1
8	10Y	-5	8/3	1	0	0	0
9	12Y	-4.5	4	1	0	0	0
10	12Y	-1.5	4	1	-4.5	-4	1
11	4Y	0,5	4	1	-2.5	-4	1
12	3M	-1.5	0	1	0	0	0
13	5M	-4.5	2	1	0	0	0
14	3M	-4.5	4	1	0	0	0
15	3M	-1.5	4	1	-4.5	-4	1
16	M	0,5	4	1	-2.5	-4	1
17	4.5X'	0	0	0	2	0	-1
18	7.5X'	0	0	0	5	8/3	-1
19	15X'	0	0	0	4.5	2	-1
20	4.5X'	2	-4	-1	5	4	-1
21	9X'	1.5	-4	-1	4.5	4	-1
22	0,5X'	-1/3	-4	-1	8/3	4	-1
23	2X'	-0,5	-4	-1	2.5	4	-1
24	10Y'	0	0	0	5	8/3	-1
25	12Y'	1.5	-4	-1	4.5	4	-1
26	4Y'	-0,5	-4	-1	2.5	4	-1
27	3M'	0	0	0	-1.5	0	1
28	5M'	0	0	0	-4.5	-2	1
29	3M'	-1.5	4	1	-4.5	-4	1
30	M'	0.5	4	1	-2.5	-4	1
31	4500	5	-8/3	-1	0	0	0
32	2700	5	-4	-1	0	0	0
33	2700	-1	4	1	-4	-4	1
34	1800	0,5	4	1	-2.5	-4	1
35	300	2/3	4	1	-7/3	-4	1
36	25000/3	5,25	-3	-1	0	0	0
37	15000	4.5	-4	-1	0	0	0
38	900	4	-4	-1	0	0	0
39	1800	1.5	-4	-1	4.5	4	-1
40	900	1	-4	-1	4	4	-1
41	1200	-0,5	-4	-1	2.5	4	-1
42	100	-2/3	-4	-1	7/3	4	-1
43	25000/3	0	0	0	-5.25	-3	1
44	1500	0	0	0	-5	-8/3	1
45	900	-2	4	1	-5	-4	1
46	100	-2/3	-4	-1	7/3	4	-1

Expresando los productos que indican los desplazamientos son nulos queda el sistema de ecuaciones

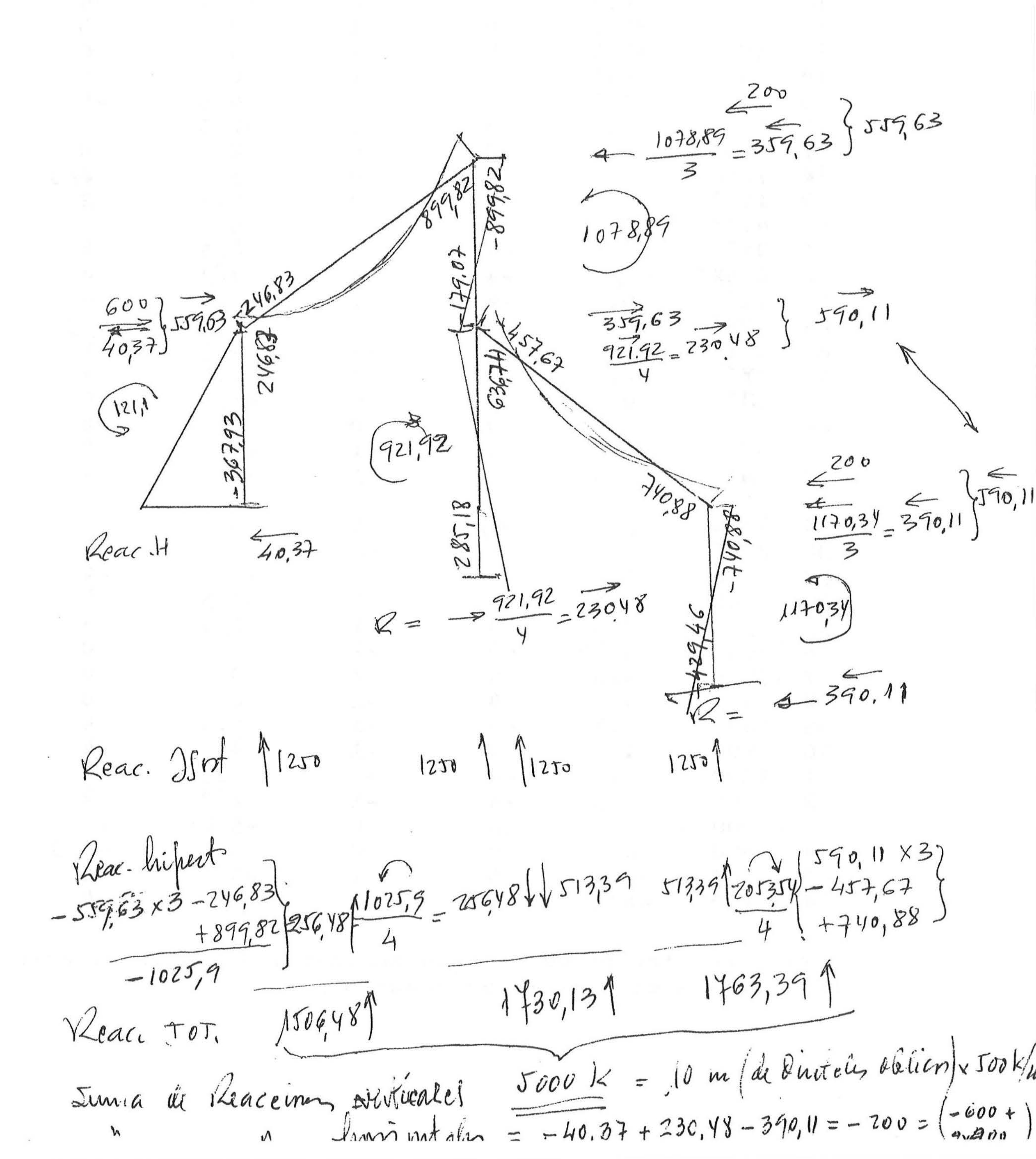
186,3	X -120	Y -44.5	M 21.3	X' 16	Y' -4	M' = -150316,6
Simétrico	138,6	38	-64	-64	16	= 105000
		15	-16	-16	4	= 29833.3
			183.3	114	-43	= 56583.3
				90,6	-26	= 35400
					12	= -11433.3

que resuelto da

X== -40,3682   Y = 1506,4752   M = -367,9254

X' = -390,1141   Y' = 1763,3885   M' = -429,4591

y trasladados a sus diagramas y sumándolos dan



Conclusiones de este ejercicio

1ª) El empuje (600-40,37=559,63) en el nudo 1 da un momento en 2, que sumado a los momentos del dintel 1-2

$$-559{,}63 \times 3 - 246{,}83 + -899{,}82 = -1025{,}9 \text{ mk}$$

que al dividirlo por la anchura del vano (4 m) da las reacciones hiperestáticas en los apoyos 5 y 6

$$\frac{1025{,}9}{4} = \uparrow 256{,}475 \downarrow \text{k}$$

2ª) Identicamente el empuje en el nudo 4 (200+390,11 = = 590,11) da un momento en el nudo 3 que sumados a los de los ex extremos de la barra 3-4

$$590{,}11 \times 3 - 447.67 + 740{,}88 = 2053{,}54 \text{ mk}$$

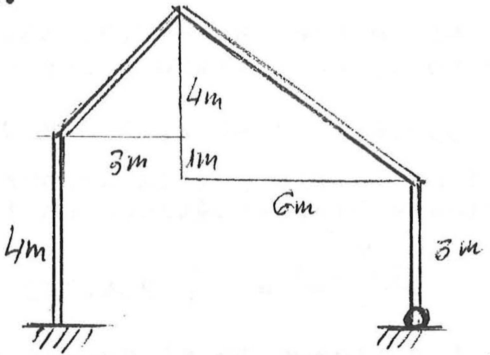
al dividirlo por su vano (4 m.) da las reacciones hiperestáticas en sus respectivos apoyos

$$\frac{2053{,}54}{4} = \downarrow 513{,}39 \uparrow \text{k.}$$

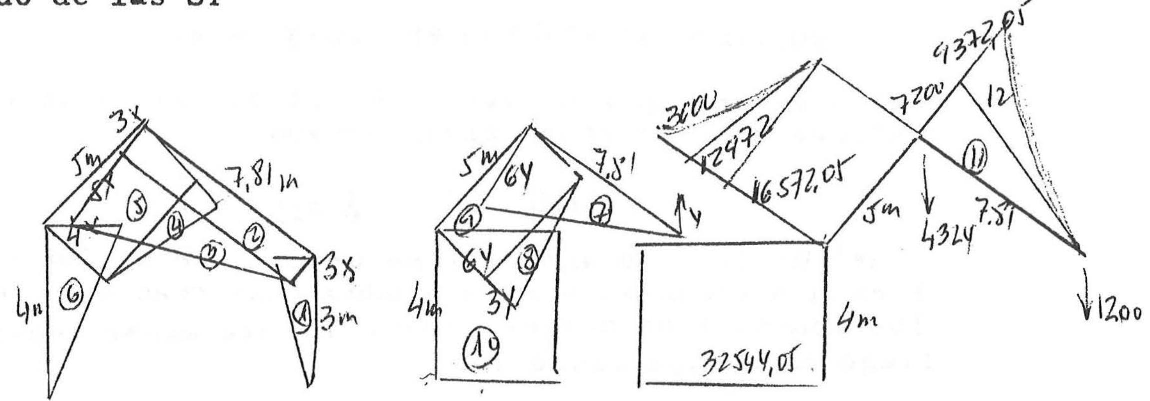
3ª) De todo lo anterior se deduce que si los dinteles fuesen horizontales solo producirían reaciones hiperestáticas los momentos de sus extremos. A esta misma conclusión ya se llegó en el ejercicio 4º.

Ejercicio Nº 16

Determinar los diagramas de momentos y de cortantes en la estructura adjunta, suponiendo que el peso propio de las barras es de 400 K/m.



Solución Adoptando como incognitas las reacciones en la rotula quedan los diagramas de momentos para aplicar el Método de las SY



nº	S	y(X=1)	y(Y=1)	nº	S	y(X=1)	y(Y=1)
1	4.4X	2	0	9	30Y	6	7.5
2	23.43X	5.5	3	10	36Y	2	9
3	19.525X	19/3	4	11	28116	-19/3	-4
4	10X	20/3	7	12	24398.57	-6.75	-4.5
5	20X	6	7.5	13	82860.25	-6	-7.5
6	8X	8/3	9	14	32430	-16/3	-8
7	23.43Y	19/3	4	15	50000	-5	-8.25
8	7.5Y	16/3	8	16	130176,2	-2	-9

que dan el sistema $469.523\ X + 440{,}39\ Y = 1523232{,}248$
$440{,}39\ X + 702{,}72\ Y = 2687235{,}24$

que tiene por soluciones $X = -831{,}0)\ k$ $Y = 4344{,}88\ k$

que sustituidos en sus respectivos diagramas y sumados al del peso propio dan

Diagram labels: ① 2848,67; -2848,67; 5; 7,81; 4m; 3235,59; 831,07; ② -3235,59; 3m; 1m; 6m; 2493; ③ 12; -2493,21; 831,07 H'; 4m; 3324,28; 3m; 2493,21; 6559,87 (Es suma de momentos en nudos); 831,07 = H'; ④ $\uparrow V_T = 3579,12$; ⑤ $\uparrow V'_T = 4344,88$

Reac. isost. = 1600 × 9, 2000 × 7,5, 7,81 × 400 × 3 } = 38772 / 9 = 4308 ↑ — 3579,12

2000 × 1,5, 7,81 × 400 × 6, 1200 × 9 } = 32544 / 9 = 3616 ↑ } 4344,88

728,88 ↑

Reac. hiperest. = ↓ 728,88 = 6559,87 / 9 =

1er Procedimiento

2º Procedimiento

o bien -

831,07 × 4 = 3324,28 (momento respecto a (1) de H en 2)

831,07 × 5 = 4155,35 (momento respecto a 1 de H' en 3)

92,34 ↓ = 831,07 / 9 = 92,34 ↑

3235,59 + 2493,21 = 5728,80

639,53 ↓ = 5.728,80 / 9 = 639,53 ↑

728,87 ↓ — 728,87 ↑

3er Procedimiento

o bien = Calculo de reacciones totales = Tomando momentos respecto a los apoyos.

$9V_T + 6559,87 - 400 \times 4 \times 9 - 400 \times 5 \times 7,5 - 7,81 \times 400 \times 3 = 0$

$V_T = \frac{32212,13}{9} = \quad V_T = 3579,12 \uparrow$

$V'_T = 19,81 \times 400 - 3579,12 = 4344,88 \uparrow$

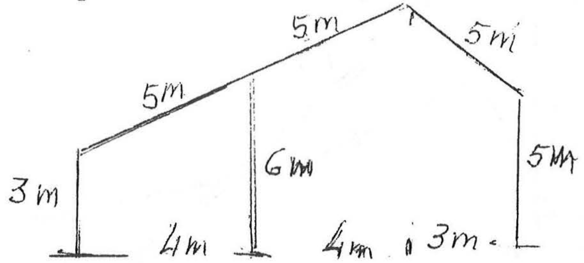
Reac. isostaticas $V_i = 4308$ $V'_i = 3616$ (calculadas arriba)

Reac. hiperestaticas $V_h = V_T - V_i = 3579,12 - 4308 = -728,88k$

$V'_h = V'_T - V'_i = 4344,88 - 3616 = 728,88k$

Ejercicio nº 17

Calcular el diagrama de momentos en la estructura suponiendo solo peso en los pares de 1200 k/m-



Solución = Las cargas normales a los pares valen
p=1200x0.8=960 k/m q=1200x0.6=720 k/m

La estructura se hace isostática dando cortes al pie de los dos pilares derechos, y considerando el conjunto como un voladizo se tienen los diagramas de momentos

que dan las áreas y ordenadas

Nº	S	y(X=1)	y(Y=1)	y(M=1)	y(X∩=1)	y(Y∩=1)	y(M∩=1)
1	12.5X	10/3	0	-1	0	0	0
2	10X	23/3	2	-1	0	0	0
3	25X	7	1.5	-1	0	0	0
4	7.5X	8	13/3	-1	0	0	0
5	30X	7.5	5	-1	0	0	0
6	7.5X	5	25/3	-1	5	4/3	-1
7	15X	4.5	9	-1	4.5	2	-1
8	4.5X	2	11	-1	2	4	-1
9	7.5Y	23/3	2	-1	0	0	0
10	10Y	7	17/3	-1	0	0	0
11	15Y	7.5	5	-1	0	0	0
12	10Y	4	29/3	-1	4	8/3	-1
13	35Y	4.5	9	-1	4.5	2	-1
14	33Y	1.5	11	-1	1.5	4	-1
15	5M	-2.5	0	1	0	0	0
16	5M	-7	-1.5	1	0	0	0
17	5M	-7.5	-5	1	0	0	0
18	5M	-4.5	-9	1	-4.5	-2	1
19	3M	-1.5	-11	1	-1.5	-4	1
20	18X∩	0	0	0	4	0	-1
21	7.5X∩	5	25/3	-1	5	4/3	-1
22	15x∩	4.5	9	-1	4.5	2	-1
23	4.5X∩	2	11	-1	2	4	-1
24	10Y∩	4	29/3	-1	4	8/3	-1
25	12Y∩	1.5	11	-1	1.5	4	-1
26	6M∩	0	0	0	-3	0	1
27	5M∩	-4.5	-9	1	-4.5	-2	1
28	3M∩	-1.5	-11	1	-1.5	-4	1
29	15000	-8	-2.25	1	0	0	0
30	45000	-7.5	-5	1	0	0	0
31	60000	-7	-17/3	1	0	0	0
32	20000	-6.75	-6	1	0	0	0
33	225000	-4.5	-9	1	-4.5	-2	1
34	120000	-4	-29/3	1	-4	-8/3	1
35	20000	-3.75	-10	1	-3.75	-3	1
36	315000	-1.5	-11	1	-1.5	-4	1

Igualando a cero los desplazamientos de las incognitas queda el sistema

X	Y	M	X∩	Y∩	M∩		Indep.
692.33	487	-112	114	58	-27	=	3052500
487	921.33	-110.5	247	228.66	-78	=	7568750
-112	-110.5	23	-27	-22	8	=	-820000
114	247	-27	186	58	-45	=	2040000
58	228.66	-22	58	74.66	-22	=	2090000
-27	-78	8	-45	-22	14	=	-680000

ue resuelto da

X= 2424.405 k Y= 1413.629 k M= 8257.027 mk.

X∩= 3475.121 k Y∩= 26705.947 k M∩= 12398.362 mk.

Sustituyendo estos valores en sus respectivos diagramas y sumandolos con los de las acciones queda el definitivo

$H + H' + H'' = 0$

$H = -3475,12 - 2424,405 = -5899,53$

8803,51
-8803,51
-28815,19
8452,36
20362,83
14416,90
-14416,90
20850,72
17698,58
-3864,99
3864,99
12122,02
5899,53
-3281,68
12398,36
3475,12
8257,03
2424,405

Reac. Isos = ↑3000   3000↑   ↑5571,43   6428,57↑

Reac.hipe=
5899,525x3
+14416,897
+20362,83 = 52478.30/4

-2424.405x
-28815.19
-3864.998=
35104.597/7

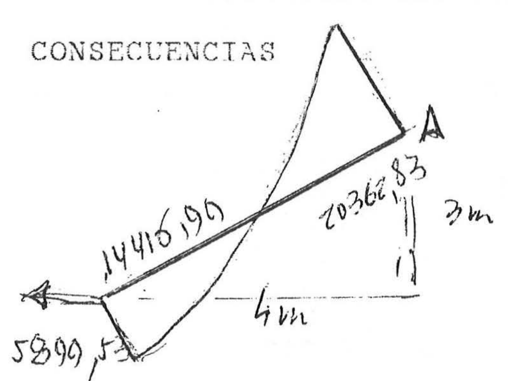
V = ↓13119.575 / ↓10119.575   13119.575↑   ↑5014.94   V' = 26705.945↑   ↓5014.94   V'' = 1413.63↑

Comprobación de V,V' y V''=Tomando momentos respecto a A,B y B

4V +5899.525x6-3281.678+20362.83-6000x2= 0 o sea V= -10119.575 k
4V'-10119.575x8+5899.525x9-3475.12x9-3281.678+12398.36-
-8803.505-6000x6-6000x2=0 o sea V'= 26705.945 k.

-3V''-2424.405x9+8257.027+8803.505+6000x1.5=0 V''= 1413,63 k.

CONSECUENCIAS



1ª Las reacciones hiperestáticas de las barras inclinadas estan producidas además de los momentos en sus extremos por el traslado de H=5899.525 k. que anula el momento de su pilar y produce respecto al punto A el moment 5899.525x3=17698.575,que sumado a los 14416.897+20362.83 da 52428.302 que dividid por 4m. da 13119.57K reacciones Hiperest.

2ª En el vano derecho las reacciones hiperestáticas se resuelven, observando que en B los momentos se anulan ,y al tomar momentos respecto a A = -2424.405x1-28815.194-3864.998= -35104.597 que dividido por la longitud del vano(distancia entre pilares) quedan como reacciones hiperestáticas

35104.597/7 = 5014.94

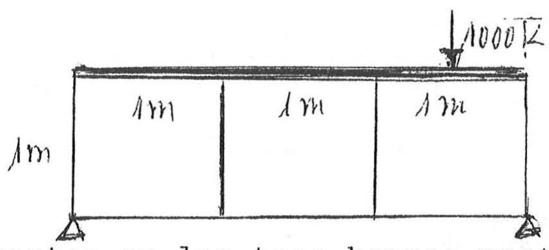
A -28815,19
-8803,525
B
8803,525
-3864,99
C
2424,405
7 m.
2424,405

3ª Observese la existencia que existe con un dintel horizontal,en el que el traslado de una reacción horizontal no produce momento.

4ª La componente horizontal en A equilibra a la que se ha trasladado a C, dando también si se toma momentos respecto a C el mismo valor -35104.597mk

EJERCICIO nº 18

Calcular la Viga Vierendel de tres vanos con peso propio en las barras superiores de 100 k/m.



Dando cortes en las tres barras verticales de la derecha, se convierte la estructura en isostática, dando por consiguiente nueve incognitas. Para los diagramas de cargas determinemos la reacción derecha tomando momentos respecto al apoyo izquierdo

$-3*V_n+1000*2.5+3*100*1.5=0$ de donde $V_n= 983.33$ K.

así se obtienen los diagramas de momentos de incognitas y cargas

59' (sumado con 64)

e ontienen las siguientes áreas y ordenadas

Nº	S	X=1	Y=1	M=1	X'=1	Y'=1	M'=1	X''=1	Y''=1	M''=1
1	0.5X	2/3	0	-1	0	0	0	0	0	0
2	X	1	0.5	-1	0	0	0	0	0	0
3	X	1	1.5	-1	1	0.5	-1	0	0	0
4	X	1	2.5	-1	1	1.5	-1	1	0.5	-1
5	0.5X	2/3	3	-1	2/3	2	-1	2/3	1	-1
6	0.5Y	1	2/3	-1	0	0	0	0	0	0
7	0.5Y	1	5/3	-1	1	2/3	-1	0	0	0
8	Y	1	1.5	-1	1	0.5	-1	0	0	0
9	0.5Y	1	8/3	-1	1	5/3	-1	1	2/3	-1
0	2Y	1	2.5	-1	1	1.5	-1	1	0.5	-1
1	3Y	0.5	3	-1	0.5	2	-1	0.5	1	-1
2	0.5Y	0	8/3	-1	0	5/3	-1	0	2/3	-1
3	2Y	0	2.5	-1	0	1.5	-1	0	0.5	-1
4	0.5Y	0	5/3	-1	0	2/3	-1	0	0	0
5	Y	0	1.5	-1	0	0.5	-1	0	0	0
6	0.5Y	0	2/3	-1	0	0	0	0	0	0
7	M	-0.5	0	1	0	0	0	0	0	0
8	M	-1	-0.5	1	0	0	0	0	0	0
9	M	-1	-1.5	1	-1	-0.5	1	0	0	0
	M	-1	-2.5	1	-1	-1.5	1	-1	-0.5	1
1	M	-0.5	-3	1	-0.5	-2	1	-0.5	-1	1
2	M	0	-2.5	1	0	-1.5	1	0	-0.5	1
3	M	0	-1.5	1	0	-0.5	1	0	0	0
4	M	0	-0.5	1	0	0	0	0	0	0
5	0.5X'	0	0	0	2/3	0	-1	0	0	0
6	X'	1	1.5	-1	1	0.5	-1	0	0	0
7	X'	1	2.5	-1	1	1.5	-1	1	0.5	-1
8	0.5X'	2/3	3	-1	2/3	2	-1	2/3	1	-1
9	0.5Y'	1	5/3	-1	1	2/3	-1	0	0	0
0	0.5Y'	1	8/3	-1	1	5/3	-1	1	2/3	-1
1	Y'	1	2.5	-1	1	1.5	-1	1	0.5	-1
2	2Y'	0.5	3	-1	0.5	2	-1	0.5	1	-1
3	0.5Y'	0	8/3	-1	0	5/3	-1	0	2/3	-1
4	Y'	0	2.5	-1	0	1.5	-1	0	0.5	-1
5	0.5Y'	0	5/3	-1	0	2/3	-1	0	0	0
6	M'	0	0	0	-0.5	0	1	0	0	0
7	M'	-1	-1.5	1	-1	-0.5	1	0	0	0
8	M'	-1	-2.5	1	-1	-1.5	1	-1	-0.5	1
	M'	-0,5	-3	1	-0.5	-2	1	-0.5	-1	1
0	M'	0	-2.5	1	0	-1.5	1	0	-0.5	1
1	M'	0	-1.5	1	0	-0.5	1	0	0	0
2	0.5X''	0	0	0	0	0	0	2/3	0	-1
3	X''	1	2.5	-1	1	1.5	-1	1	0.5	-1
4	0.5X''	2/3	3	-1	2/3	2	-1	2/3	1	-1
5	0.5Y	1	8/3	-1	1	5/3	-1	1	2/3	-1
6	Y	0.5	3	-1	0.5	2	-1	0.5	1	-1
7	0.5Y	0	8/3	-1	0	5/3	-1	0	2/3	-1
8	M	0	0	0	0	0	0	-0.5	0	1
9	M	-1	-2.5	1	-1	-1.5	1	-1	-0.5	1
0	M	-0.5	-3	1	-0.5	-2	1	-0.5	-1	1
1	M	0	-2.5	1	0	-1.5	1	0	-0.5	1

52	50/3	-1	-0.75	1	0	0	0	0	0	0
53	50	-1	-1.5	1	-1	-0.5	1	0	0	0
54	50	-1	-5/3	1	-1	-2/3	1	0	0	0
55	50/3	-1	-1.75	1	-1	-0.75	1	0	0	0
56	200	-1	-2.5	1	-1	-1.5	1	-1	-0.5	1
57	100	-1	-83	1	-1	-5/3	1	-1	-2/3	1
58	50/3	-1	-2.75	1	-1	-1.75	1	-1	-0.75	1
59	125	-1	-5/6	1	0	0	0	0	0	0
60	500	-1	-1.5	1	-1	-0.5	1	0	0	0
61	500	-1	-5/3	1	-1	-2/3	1	0	0	0
62	1500	-1	-2.5	1	-1	-1.5	1	-1	-0.5	1
63	500	-1	-8/3	1	-1	-5/3	1	-1	-2/3	1
64	2950	-0.5	-3	1	-0.5	-2	1	-0.5	-1	1
65	1966.6	0	-2.5	1	0	-1.5	1	0	-0.5	1
66	491.6	0	-8/3	1	0	-5/3	1	0	-2/3	1
67	983.3	0	-1.5	1	0	-0.5	1	0	0	0
68	491.6	0	-5/3	1	0	-2/3	1	0	0	0
69	491.6	0	-2/3	1	0	0	0	0	0	0

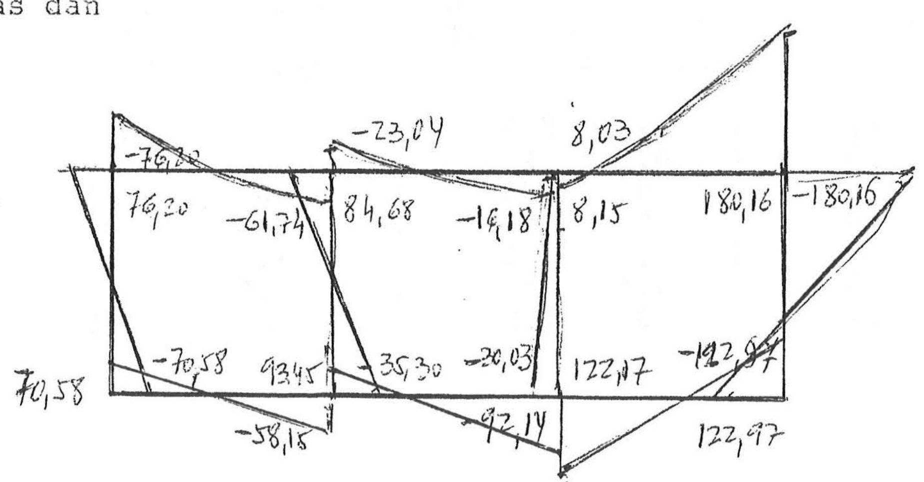
que dan el sistema

X	Y	M	X	Y	M	X	Y	M	Indep
3.66	6	-4	2.33	3	-2.5	1.33	1	-1.5	= 5050
6	27	-12	5.5	15.33	-11	4	5.66	-8	= 25483.33
-4	-12	8	-2.5	-6	5	-1.5	-2	3	=-10950
2.33	5.5	-2.5	2.66	3	-3	1.33	1	-1.5	= 4908.33
3	15.33	-6	3	9.33	-6	2.5	3.66	-5	= 14722.22
-2.5	-11	5	-3	-6	6	-1.5	-2	3	=-10316.66
1.33	4	-1.5	1.33	2.5	-1.5	1.66	1	-2	= 3791.66
1	5.66	-2	1	3.66	-2	1	1.66	-2	= 5523.61
-1.5	-8	3	-1.5	-5	3	-2	-2	4	= -7725

que resuelto da las soluciones

X = -303.124 Y = 738.1922 M = -122.9749
X = -21.875 Y = 372.588 M = -30.0336
X = 178.125 Y = 1.2783 M = 93.4519

que sustituidos estos valores en sus respectivos diagramas y sumados con los de las cargas dan



CUADERNO

169.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
info@mairea-libros.com

